



FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Física I - FIS1510

Clase N° I - Presentación del curso y cantidades físicas

Profesor: Rafael Bravo

rafael.bravo@uc.cl

Información general

Equipo docente

Profesor: Rafael Bravo
rafael.bravo@uc.cl

Instituto de Física, Oficina 303

Ayudante: Javiera Villalobos
jvillalobos@uc.cl

Clases

Cátedra: Lunes y Miércoles 10:50 - 12:10

Ayudantía: Viernes 10:50 - 12:10

Fechas de evaluaciones

Interrogación 1: Viernes 12 de Septiembre

Interrogación 2: Viernes 24 de Octubre

Interrogación 3: Viernes 28 de Noviembre

Examen: Viernes 12 de Diciembre

Inasistencia

En caso de no asistir a una evaluación, si presenta justificación con certificado médico, el examen reemplaza la nota de la evaluación.

En caso de faltar a más de una evaluación, debe rendir examen recuperativo a comienzos del próximo semestre.

Evaluación del curso

3 Interrogaciones, I_i (~ 2 unidades por interrogación)

Si cumple con (a): $\bar{I} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 I_i \geq 5.0$ **y** (b): $I_i \geq 3.0$

Entonces

$$N_f = \bar{I}$$

Si **no** cumple con (a) **o** (b), debe dar examen. En ese caso

$$N_f = 0.7 \times \bar{I} + 0.3 \times N_e$$

El curso se aprueba con $N_f \geq 4.0$

Habrán al menos 3 Controles. Estos servirán para acumular décimas para las interrogaciones.

Se realizarán, la misma semana de la evaluación. El día está por definirse.

Contenidos del curso

1.- Introducción

- Cantidades físicas
- Sistemas de unidades
- Análisis dimensional
- Estimaciones
- Vectores

2.- Cinemática

- Posición, velocidad y aceleración
- Ecuaciones de itinerario
- Movimiento en 1 y 2 dimensiones

3.- Dinámica

- Leyes de Newton
- Estática
- Trabajo y energía
- Momentum lineal

4.- Sistemas de partículas

- Movimiento circular
- Cuerpos rígidos
- Cinemática del cuerpo rígido

5.- Dinámica del cuerpo rígido

- Momento de inercia
- Momento angular
- Torque

6.- Mecánica de fluidos

- Estática de fluidos y presión
- Principio de Arquímedes
- Principio de Pascal

7.- Dinámica de fluidos

- Fluidos en movimiento
- Ecuación de Bernoulli

Bibliografía

Mínima:

Serway, R.A. & J.W. Jewett Jr. - *Física para Ciencias e Ingeniería, Volumen I.*

Sears & Zemansky - *Física Universitaria, Volumen I.*

Enfocada en construcción civil:

Beer, Johnston & Eisenberg - *Mecánica vectorial para ingenieros, estática y dinámica*

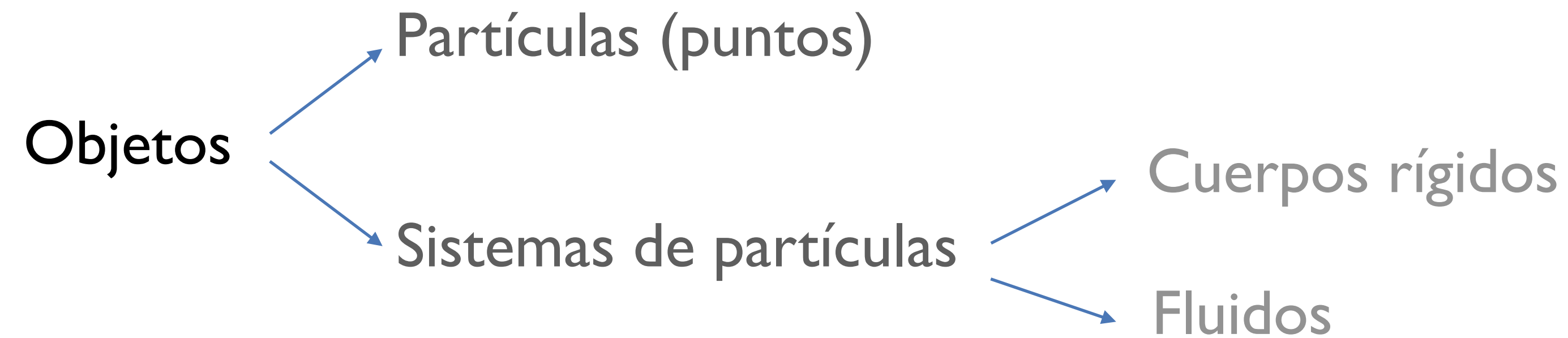
R.C. Hibbelet - *Ingeniería mecánica, estática.*

Útil para aclarar conceptos:

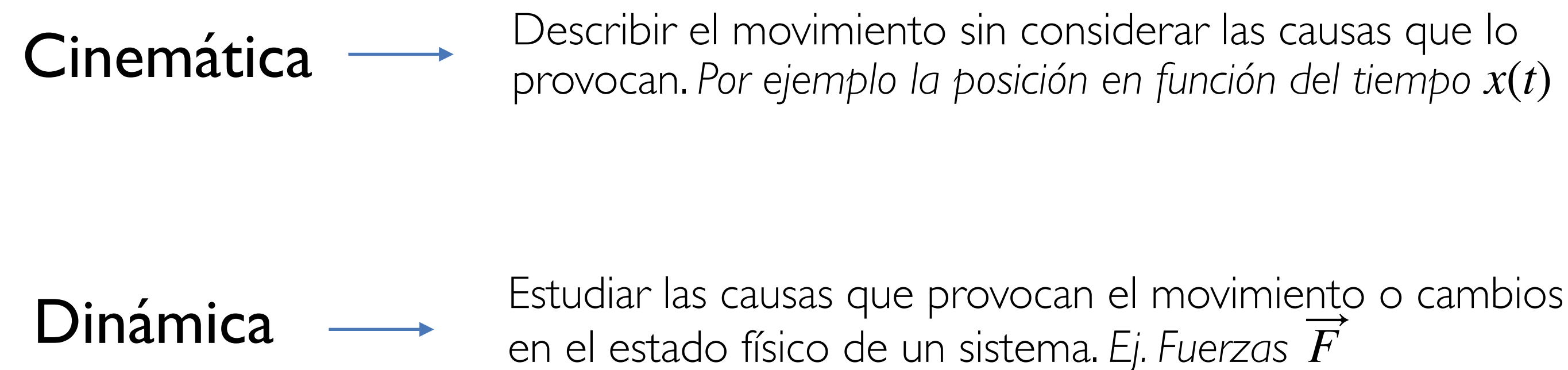
Paul G. Hewitt - *Física Conceptual*

Introducción

En este curso describirémos el movimiento de diferentes objetos



Dos grandes descripciones



Fundamentales

Masa (M) : Propiedad intrínseca de los cuerpos. Medida de la inercia

Longitud (L) : Medida de la separación o distancia entre dos puntos en el espacio

Tiempo (T) : Medida de la duración o separación entre acontecimientos

Patrones estandarizados de medida. Sistema Internacional (SI) de medidas

metro (m) : *distancia recorrida por la luz en el vacío en $1/299.792.458$ segundos*

$$1m = \frac{c}{299792458} s$$

segundo (s) : *duración de $9.192.631.770$ veces la transición entre los dos estados hiperfinos del estado base del isótopo 133 del átomo de Cesio.*

$$1s = \frac{9192631700}{\Delta\nu_{\text{Cs}}}$$

kilogramo (kg) : *se define fijando el valor de la Constante de Planck a $h = 6,62607015 \times 10^{-34} \text{kgm}^2/\text{s}$*

$$1kg = \frac{h}{6,62607015 \times 10^{-34} \frac{s}{m^2}} \simeq 1,4755214 \times 10^{40} \frac{h\Delta\nu_{\text{Cs}}}{c^2}$$



FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Física I - FIS1510

Conversion de unidades, estimaciones y análisis dimensional

Profesor: Rafael Bravo

rafael.bravo@uc.cl

Derivadas

Cantidad	Dimensiones	Medida en el SI
Área (A)	$[A] = L^2$	m^2
$[\] \rightarrow$ Denota las “dimensiones” de una cantidad física Dimensión: naturaleza de una cantidad física		
Volumen (V)	$[V] = L^3$	m^3
Rapidez (v)	$[v] = L / T$	m/s
Aceleración (a)	$[a] = L / T^2$	m/s^2
Densidad (ρ)	$[\rho] = M / L^3$	kg/m^3
Fuerza (F)	$[F] = M L T^{-2}$	Newton (N), $1 N = 1 kg m / s^2$
Energía (E)	$[E] = M L^2 T^{-2}$	Joule (J), $1 J = 1 kg m^2 / s^2$
Frecuencia (f)	$[f] = T^{-1}$	Hertz (Hz), $1 Hz = s^{-1}$

Conversión de unidades

Se necesita conocer la equivalencia entre los diferentes sistemas de unidades o cantidades

Ejemplo: Cuántos años tiene una persona de 2.522.880.000 segundos?

→ En este caso es necesario encontrar la equivalencia entre segundos y años

1 año = 365 días, 1 día = 24 horas, 1 hora = 60 minutos, 1 minuto = 60 segundos

$$\begin{aligned} 1 \text{ año} &= 1 \cancel{\text{año}} \cdot \left(\frac{365 \cancel{\text{días}}}{1 \cancel{\text{año}}} \right) \cdot \left(\frac{24 \cancel{\text{horas}}}{1 \cancel{\text{día}}} \right) \cdot \left(\frac{60 \cancel{\text{min}}}{1 \cancel{\text{hora}}} \right) \cdot \left(\frac{60 \cancel{\text{s}}}{1 \cancel{\text{min}}} \right) \\ &= 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} = 31.536.000 \text{ s} \end{aligned}$$

1 año = 31.536.000 segundos

Entonces

$$2.522.880.000 \text{ s} = 2.522.880.000 \text{ s} \cdot \left(\frac{1 \text{ año}}{31.536.000 \text{ s}} \right) = \left(\frac{2.522.880.000}{31.536.000} \right) \text{ años} = 80 \text{ años}$$

La persona de 2.522.880.000 segundos, tiene 80 años

Estimaciones y órdenes de magnitud

Existen preguntas que no requieren de una cifra exacta, sino que basta una estimación en potencias de 10. Es decir, conocer su *orden de magnitud*

Cómo determinar el orden de magnitud de alguna cantidad?

Expresar el número en notación científica, con el multiplicador de la potencia como un número entre 1 y 10.

$$a \times 10^n, \quad 1 < a < 10$$

Si $a < \sqrt{10} \approx 3,162$, el orden de magnitud es n

Si $a > \sqrt{10}$, el orden de magnitud es $n + 1$

Ejemplos

$$\begin{aligned} 0.0072m &= 72 \times 10^{-4} m \\ &= 7,2 \times 10^{-3} m \\ &\sim 10^{-2} m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 280m &= 2,8 \times 10^2 m \\ &\sim 10^2 m \end{aligned}$$

Esta técnica sirve como primera aproximación a un problema. Tiene una confiabilidad de hasta un factor de 10



FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Física I - FIS1510

Sistemas de coordenadas, vectores y cinemática I

Profesor: Rafael Bravo

rafael.bravo@uc.cl

Representación de cantidades físicas: escalares y vectores

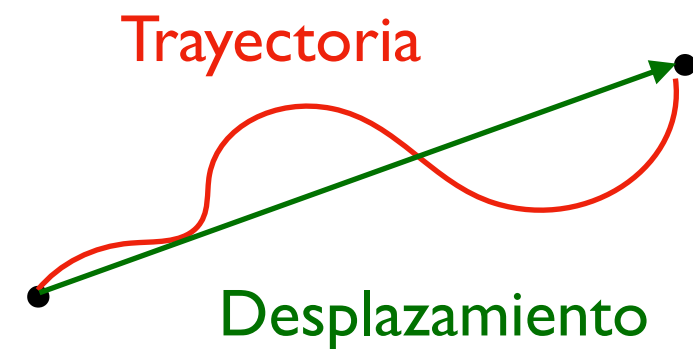
Cantidades físicas

Escalares

Se especifican mediante un valor numérico con una unidad adecuada. Ej. temperatura $T = 15^{\circ}\text{C}$, masa $m = 5\text{kg}$, rapidez $v = 5\text{m/s}$. Para manipular cantidades escalares se utiliza aritmética ordinaria

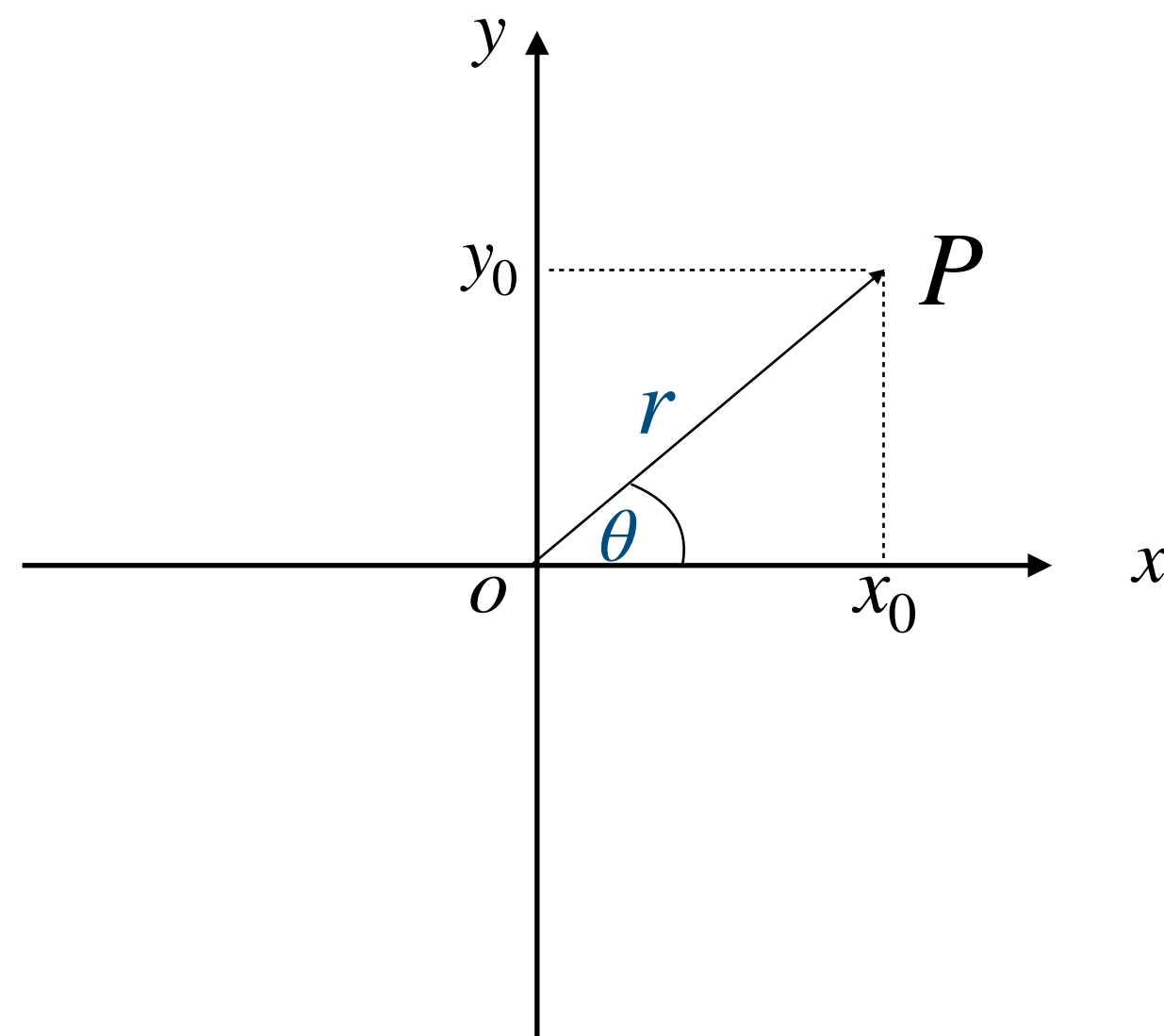
Vectores

Se especifican por completo mediante un valor numérico con unas apropiadas, más una dirección en el espacio. Ej. el vector de desplazamiento $\Delta\vec{x} = 5\text{m}\hat{x}$



- La flecha representa la dirección del desplazamiento
- La longitud de la flecha representa la magnitud del desplazamiento
- El vector de desplazamiento es independiente de la trayectoria. Solo depende del punto inicial y final

Representación en el espacio → Sistema de coordenadas



- El punto P tiene coordenadas cartesianas (x_0, y_0)
- Como también tiene coordenadas polares (r, θ)

$$x_0 = r \cos \theta, \quad y_0 = r \sin \theta$$
$$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad \tan \theta = \frac{y_0}{x_0} \implies \theta = \arctan \frac{y_0}{x_0}$$

Propiedades de los vectores

Un vector se suele representar con una letra y una flecha sobre esta, a veces también se representan con tipografía **negrita**

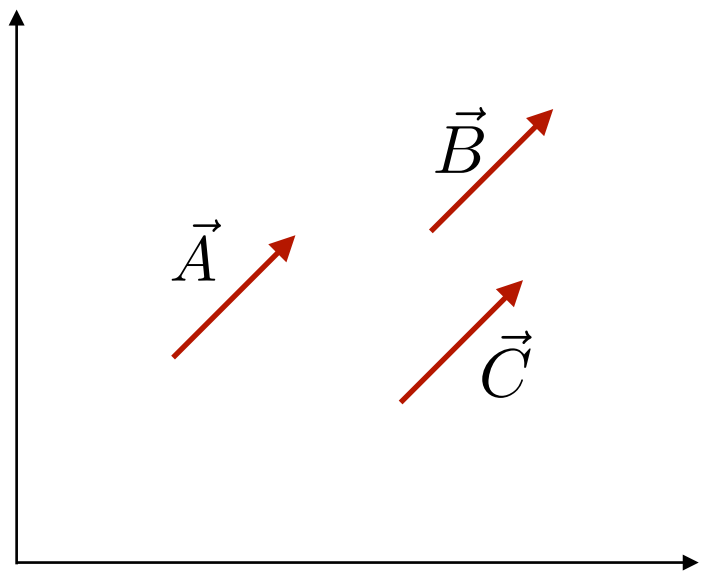
$$\vec{F} \qquad \mathbf{F}$$

La magnitud de un vector se suele representar con el símbolo de valor absoluto. Esta tiene unidades físicas y siempre es un número positivo.

$$|\vec{F}| \qquad |\mathbf{F}| \qquad \geq 0$$

Algunas propiedades de los vectores en su representación gráfica

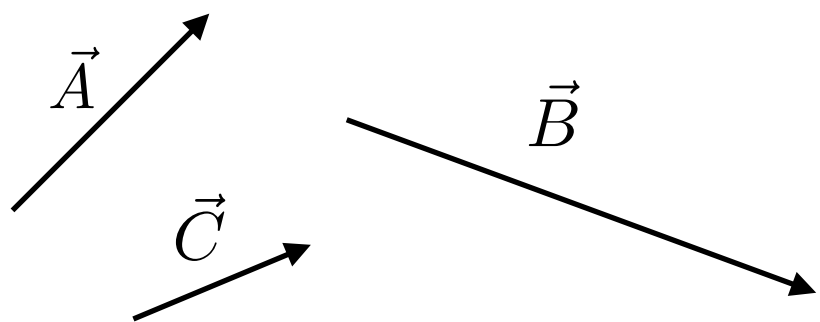
- Igualdad entre vectores: son iguales si tienen la misma magnitud y dirección



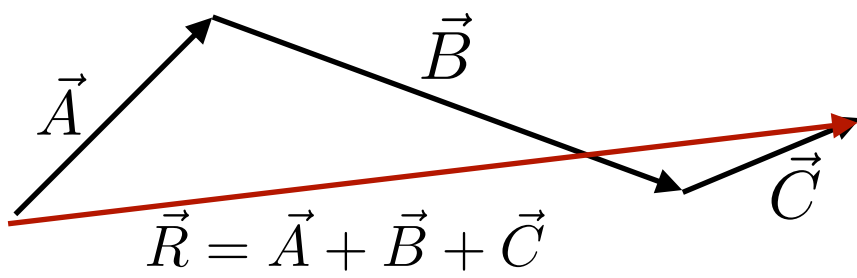
$$\vec{A} = \vec{B} = \vec{C} \iff |\vec{A}| = |\vec{B}| = |\vec{C}|$$

Como los vectores de la figura están en rectas paralelas y apuntan en la misma dirección, entonces son iguales. Independiente de que no tengan un origen en común

- Adición de vectores



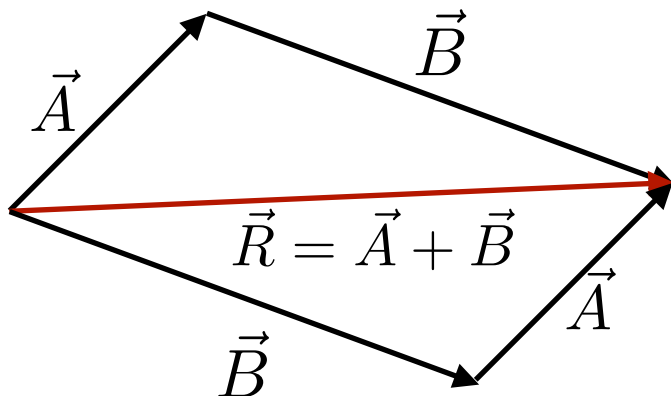
$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$



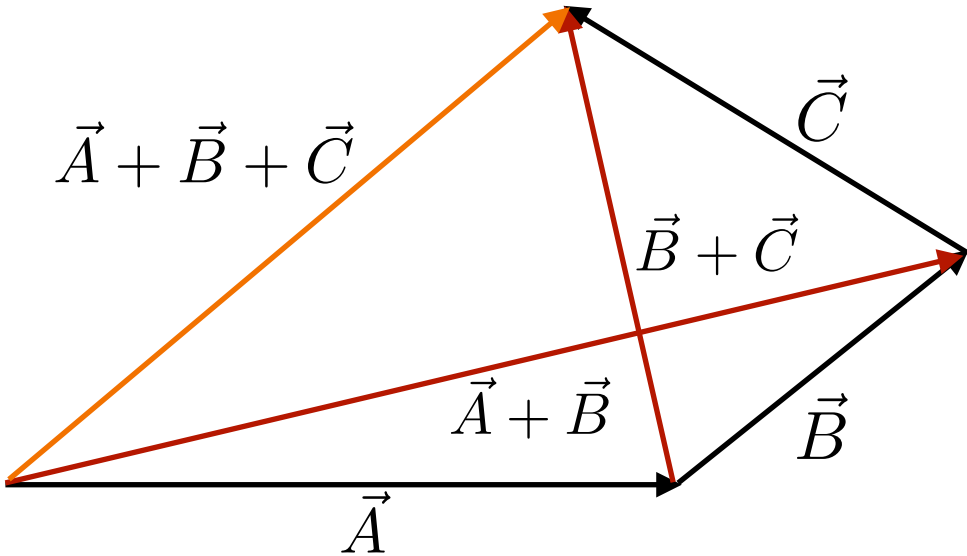
$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

- Conmutatividad de la suma

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

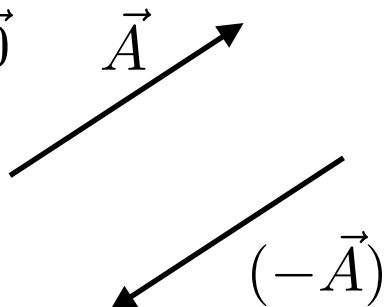


- Asociatividad de la suma



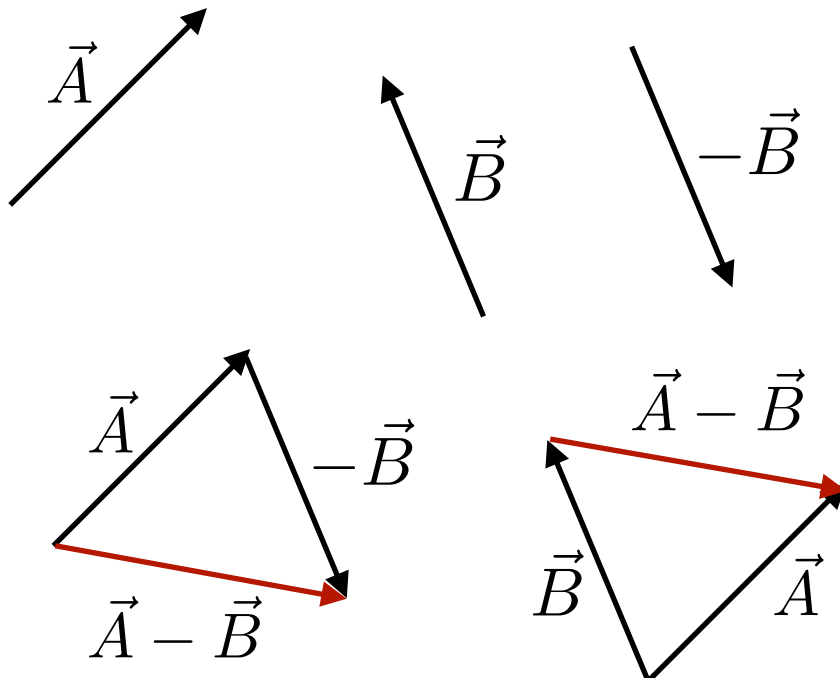
- Inverso aditivo de un vector

$$\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}$$



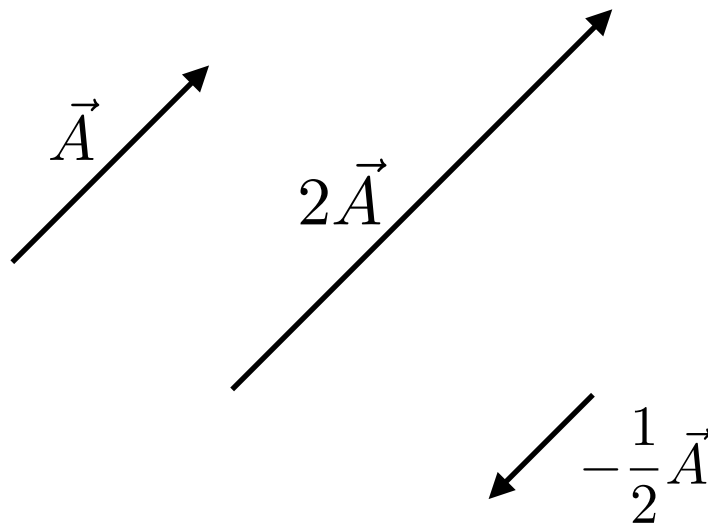
- Resta de vectores

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$



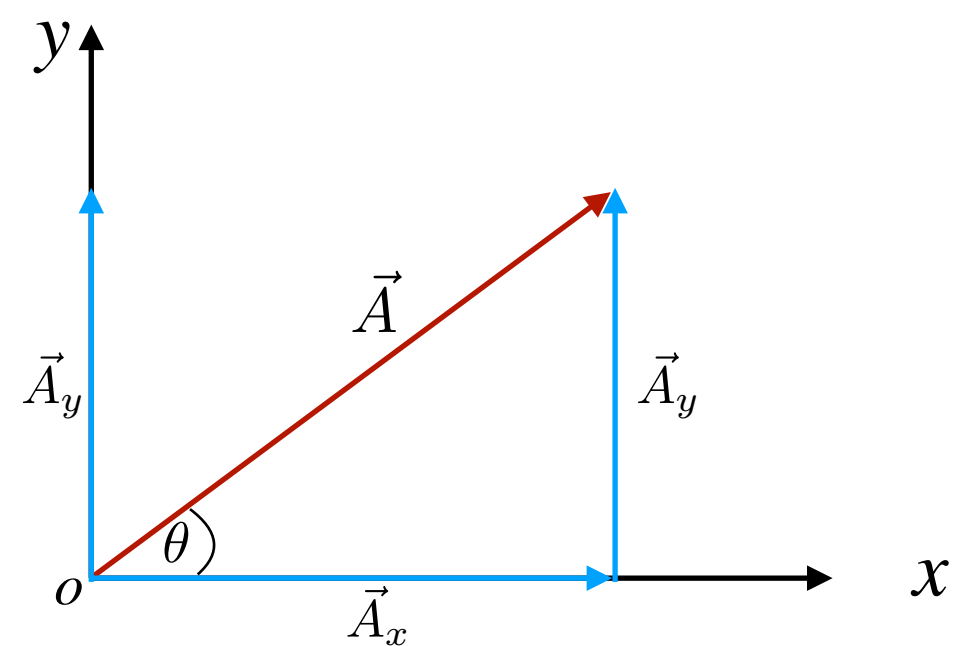
- Multiplicación de un vector por un escalar

Si un vector $\vec{A}$ se multiplica por una cantidad escalar positiva m , el producto es un vector que tiene la misma dirección del vector original y magnitud $m|\vec{A}|$. En el caso de que $m < 0$, el vector tendrá dirección opuesta pero la misma magnitud $m|\vec{A}|$



Componentes de un vector y vectores unitarios

La proyección de un vector en los ejes coordenados se denomina como las componentes del vector. El vector se puede expresar como la suma de sus componentes



$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

$$|\vec{A}_x| = A_x = |\vec{A}| \cos \theta$$

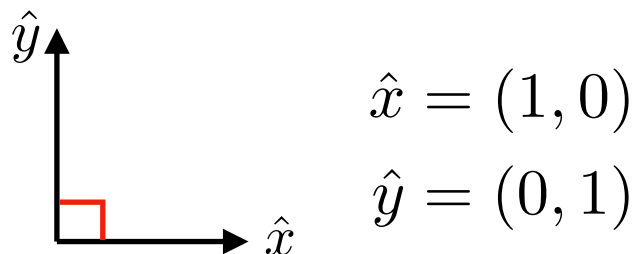
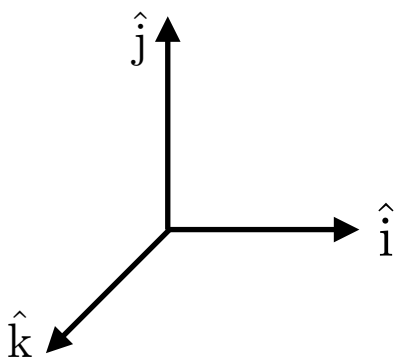
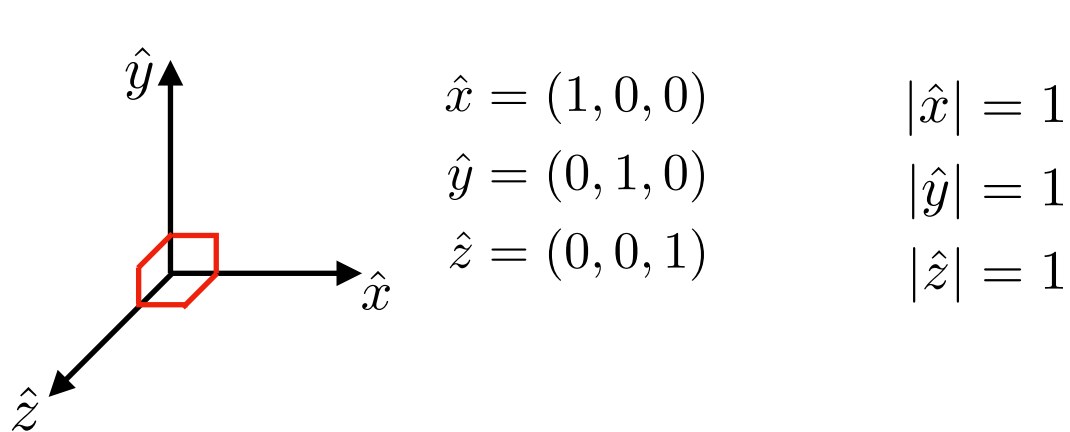
$$|\vec{A}_y| = A_y = |\vec{A}| \sin \theta$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

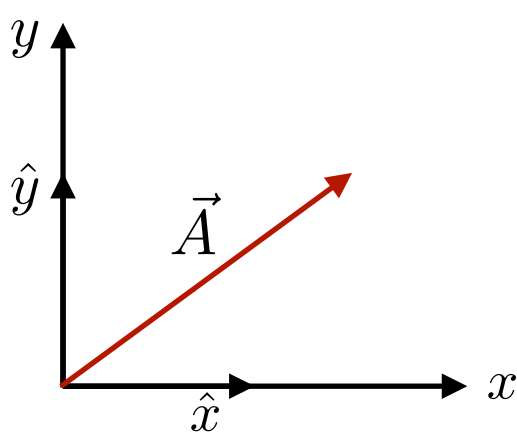
$$\theta = \arctan \frac{A_y}{A_x}$$

El espacio se puede representar por completo en términos de vectores unitarios (o base). Dependiendo de las dimensiones del espacio habrán tantos vectores unitarios como dimensiones tenga este. Cualquier vector puede ser representado en términos de una combinación lineal de el producto de cantidades escalares (el módulo de sus componentes) por los vectores unitarios del espacio.

Un conjunto de vectores unitarios, tienen la propiedad de que son mutuamente perpendiculares y tienen magnitud 1. Se dice que son *ortonormales*



Representación de un vector a través de los vectores base



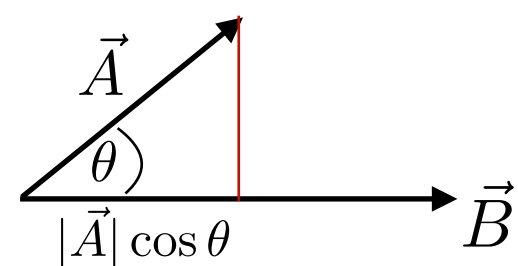
$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{x} + (A_y + B_y)\hat{y}$$

$$m\vec{A} = mA_x\hat{x} + mA_y\hat{y}$$

Producto escalar y producto vectorial

El **producto escalar** o producto punto $\cdot$ entre dos vectores se define como



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta$$

Se puede entender como la proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$ multiplicado por el módulo de $\vec{B}$ o vice versa.

- Conmutativo

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

- Distributivo con respecto a la suma $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

Analíticamente

$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y}, \quad \vec{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_x \hat{x} + A_y \hat{y}) \cdot (B_x \hat{x} + B_y \hat{y}) \\ &= A_x B_x \hat{x} \cdot \hat{x} + A_x B_y \hat{x} \cdot \hat{y} + A_y B_x \hat{y} \cdot \hat{x} + A_y B_y \hat{y} \cdot \hat{y} \\ &= A_x B_x + A_y B_y \end{aligned}$$

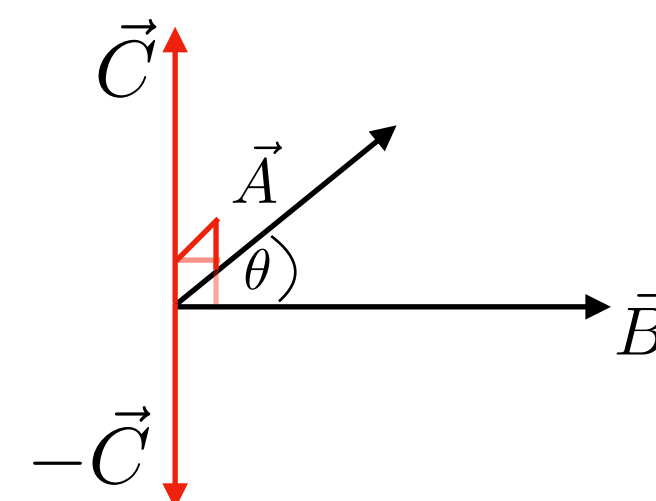
Donde se usó la ortonormalidad de los vectores unitarios

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = |\hat{x}| |\hat{x}| \cos 0 = 1$$

$$\hat{y} \cdot \hat{y} = |\hat{y}| |\hat{y}| \cos 0 = 1$$

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = |\hat{x}| |\hat{y}| \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

El **producto vectorial** o producto cruz $\times$ entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es un vector $\vec{C}$ mutuamente perpendicular a $\vec{A}$ y $\vec{B}$



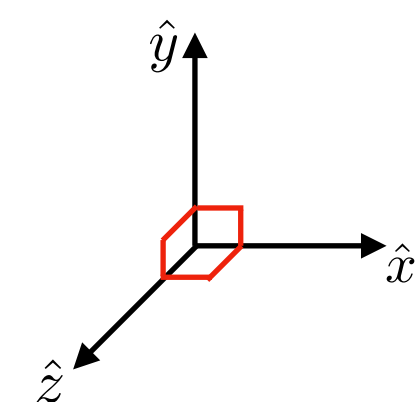
$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta$$

- No Conmutativo

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

- Distributivo con respecto a la suma $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$



$$\hat{x} = (1, 0, 0)$$

$$\hat{y} = (0, 1, 0)$$

$$\hat{z} = (0, 0, 1)$$

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$$

$$\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$$

$$\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$$

Analíticamente

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z), \quad \vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

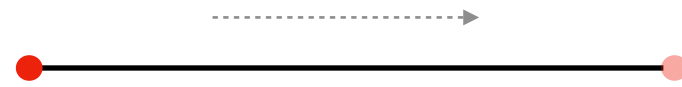
$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{x} - (A_z B_x - A_x B_z) \hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{z}$$

Cinemática: posición, desplazamiento, velocidad y rapidez promedio

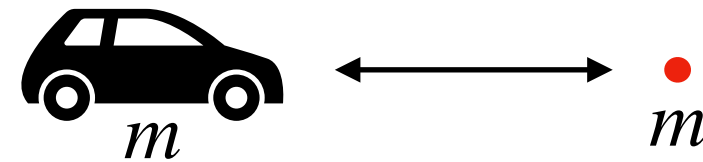
Descripción del *movimiento* de un cuerpo, sin preocuparse de las causas que lo generaron.

Movimiento: Cambio continuo en el vector de **posición** (por el momento en una sola dimensión)

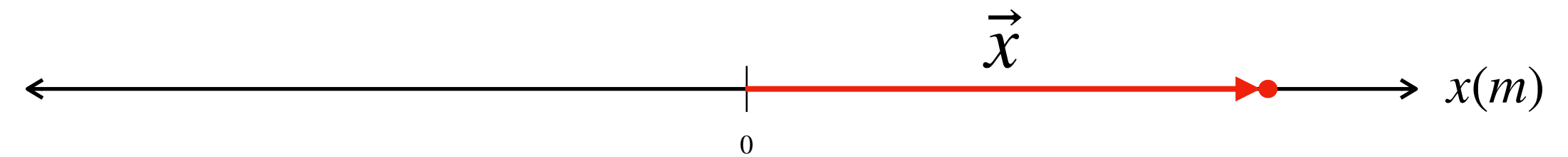
→ Traslacional



Consideraremos que un cuerpo de masa m , será descrito por una *partícula* infinitesimal de la misma masa m



El vector de **posición** de una partícula $\vec{x}$, es un **vector** que indica la ubicación de esta con respecto al origen de un sistema de coordenadas



El **desplazamiento** $\Delta\vec{x}$ de una partícula, es un **vector** que da cuenta del cambio de la posición de la partícula durante un intervalo de tiempo, usualmente entre su posición final $\vec{x}_f$ e inicial $\vec{x}_i$, y se define como

$$\Delta\vec{x} = \vec{x}_f - \vec{x}_i$$

El camino o **distancia recorrida** d por una partícula es una cantidad escalar que da cuenta de la longitud de su trayectoria.

$$d \neq |\Delta\vec{x}|, \quad d \geq 0$$

La **velocidad promedio** $\vec{v}_{prom}$, es un **vector** dado por el cociente entre el desplazamiento $\Delta\vec{x}$ y el intervalo de tiempo Δt en que ocurre tal desplazamiento

$$\vec{v}_{prom} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{t_f - t_i}$$

La **rapidez promedio** v_{prom} , es una cantidad **escalar** definida como el cociente de la distancia recorrida d entre el intervalo de tiempo en donde se recorre tal distancia

$$v_{prom} = \frac{d}{\Delta t}$$

Análisis Dimensional

Si A y B son diferentes cantidades o combinaciones de cantidades físicas, y en un problema se encuentra que $A=B$, entonces se debe cumplir que

$$[A] = [B]$$

Por ejemplo, si la posición x de una partícula se puede representar como una combinación de su aceleración a en un instante de tiempo t de la forma

$$x = k a^n t^m$$

En donde k es una constante de proporcionalidad y n y m son potencias a determinar. Como las dimensiones en ambos lados de la igualdad deben ser iguales, se tiene

$$[x] = [k a^n t^m]$$

$$L = [k][a]^n[t]^m$$

$$= (LT^{-2})^n (T)^m$$

$$L^1 T^0 = L^n T^{-2n+m}$$

Como los exponentes de cada cantidad deben ser los mismos en ambos lados de la igualdad, estos se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones

$$L^1 = L^n \implies n = 1$$

$$T^0 = T^{-2n+m} \implies 0 = -2n + m$$

$$m = 2n$$

$$m = 2$$

$$\implies x = k a t^2$$

La constante de proporcionalidad se determina experimentalmente o se predice teóricamente



FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Física I - FIS1510

Cinemática: MRU, MUA y movimiento en dos dimensiones

Profesor: Rafael Bravo

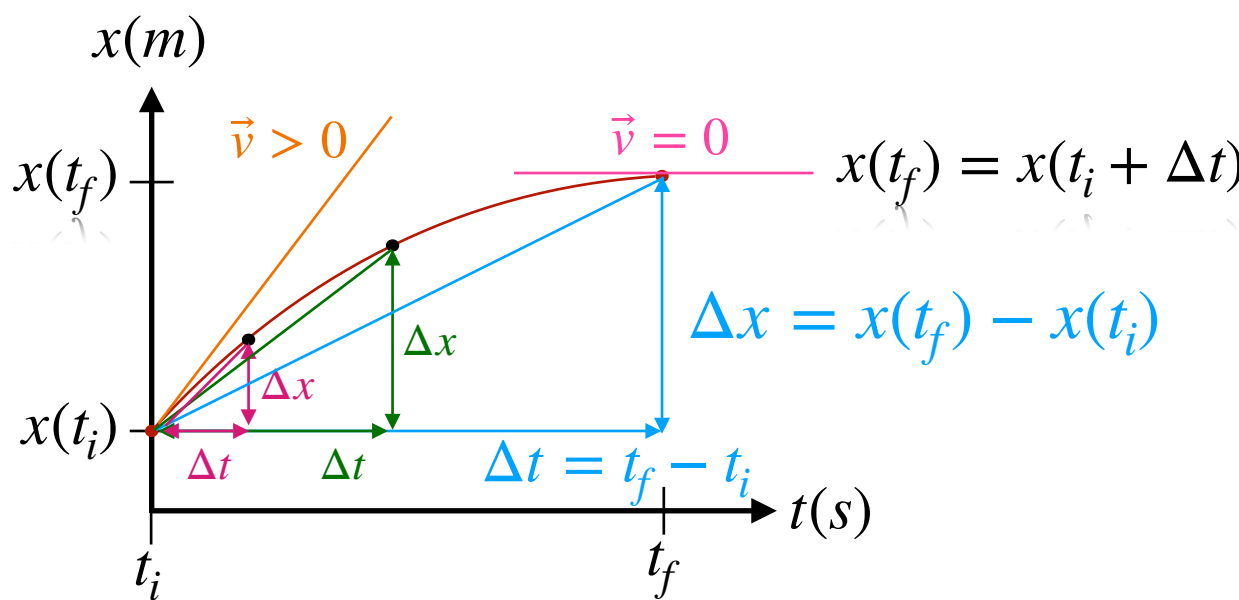
rafael.bravo@uc.cl

Cantidades de interés: vectores de velocidad y aceleración

En cinemática, las cantidades que interesa determinar son la **posición** y la **velocidad** de una partícula en movimiento. Algunas definiciones:

La **velocidad promedio** $\vec{v}_{prom}$, es un **vector** dado por el cociente entre el desplazamiento $\Delta \vec{x}$ y el intervalo de tiempo Δt en que ocurre tal desplazamiento. Corresponde a la pendiente de la recta que une los puntos $x(t_f)$ y $x(t_i)$

$$\vec{v}_{prom} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{t_f - t_i}$$

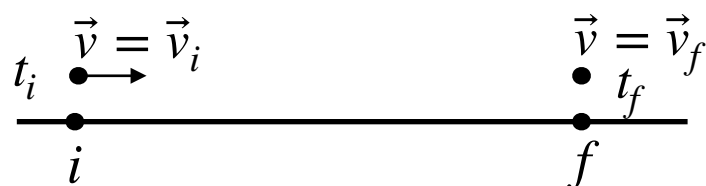


La pendiente de un gráfico de posición-tiempo es la velocidad. El signo de la pendiente indicará el signo de la velocidad. Si, la pendiente es cero, esto quiere decir que la velocidad también

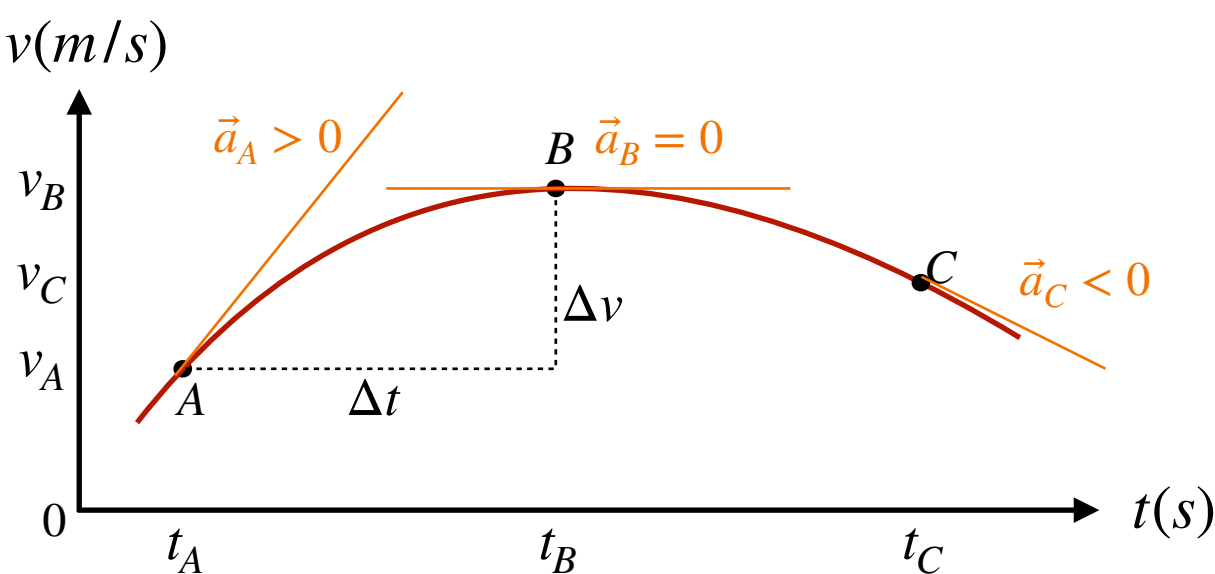
La **velocidad instantánea** $\vec{v}$, es un **vector** dado por el valor límite de la razón del cociente entre el desplazamiento y el intervalo de tiempo a medida que este último tiende a cero. Es decir, la derivada de la posición $\vec{x}(t)$ con respecto al tiempo

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(t_i + \Delta t) - \vec{x}(t_i)}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

La **aceleración promedio** $\vec{a}_{prom}$, es un **vector** dado por el cociente entre el cambio de la velocidad (*instantánea*) de una partícula y el intervalo de tiempo en que ocurre tal cambio



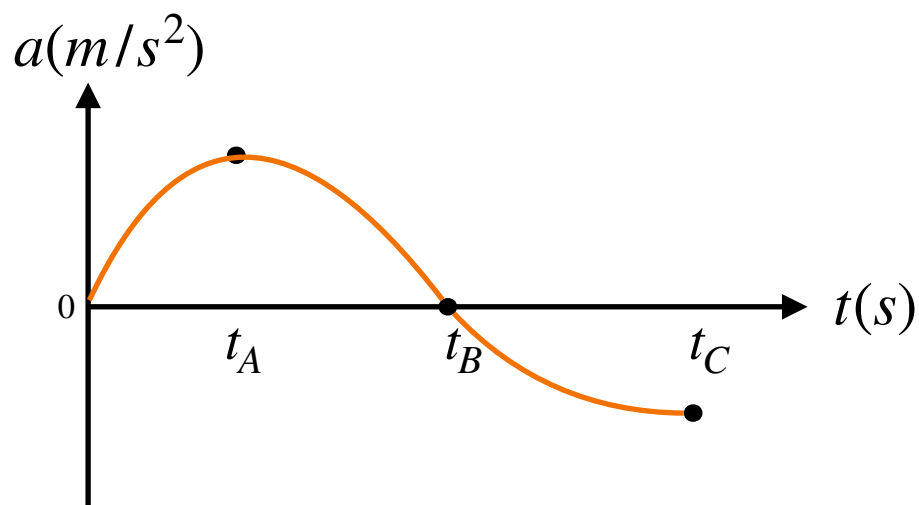
$$\vec{a}_{prom} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i}$$



Análogamente, podemos definir la **aceleración instantánea** $\vec{a}$ de una partícula tomando el límite cuando el tiempo tiende a cero en la aceleración promedio. Es decir la aceleración es la derivada de la velocidad $\vec{v}$ con respecto al tiempo

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

La pendiente de un gráfico de velocidad-tiempo es la aceleración. El signo de la pendiente indicará el signo de la aceleración.



Si tomamos en cuenta la definición de la velocidad instantánea. La aceleración es la segunda derivada de la posición con respecto al tiempo

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

Ecuaciones del movimiento

Como el movimiento es en una dimensión, podemos omitir la flecha que indica el vector sobre las cantidades y referirnos solamente a sus componentes

$$\vec{x}(t) = x(t)\hat{x}, \quad \vec{v}(t) = v(t)\hat{x}, \quad \vec{a}(t) = a(t)\hat{x}$$

Dado que conocemos la relación entre la posición, la velocidad y la aceleración de una partícula. Podemos encontrar estas de manera explícita haciendo las respectivas integrales.

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

Para la posición encontramos que

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \implies dx = v(t)dt \implies \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t v(t)dt$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t)dt$$

Análogamente para la velocidad

$$\frac{dv}{dt} = a(t) \implies dv = a(t)dt \implies \int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_0^t a(t)dt$$

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t)dt$$

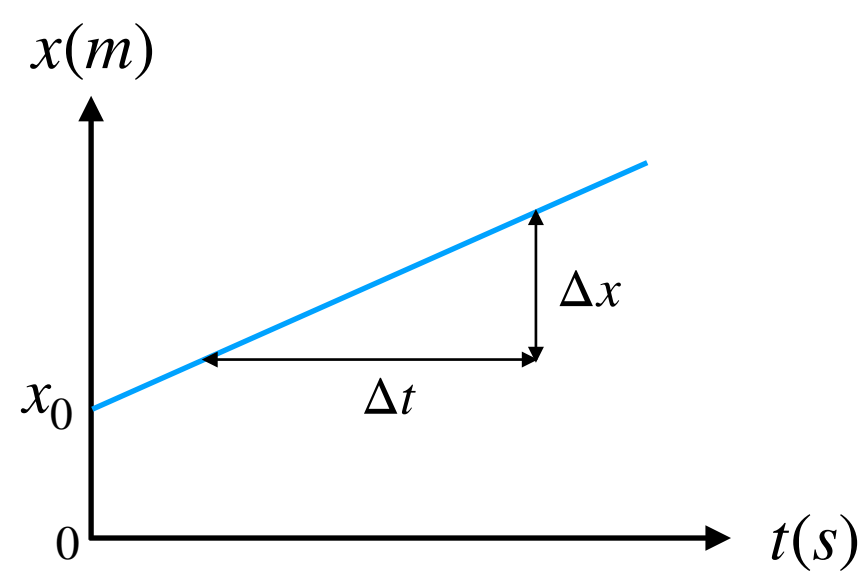
Nos enfocaremos en estudiar la situación en donde la aceleración es $a(t) = a = \text{constante}$. En ese caso encontramos:

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v(t) = v_0 + at$$

Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)

La situación más sencilla que podemos estudiar, corresponde al caso en donde la aceleración es cero $a = 0$, por lo tanto la velocidad es una constante en todo el movimiento $v = v_0$. Esto se conoce como movimiento rectilíneo uniforme. En ese caso la ecuación que determina la posición de la partícula en función del tiempo, corresponde a la ecuación de una recta



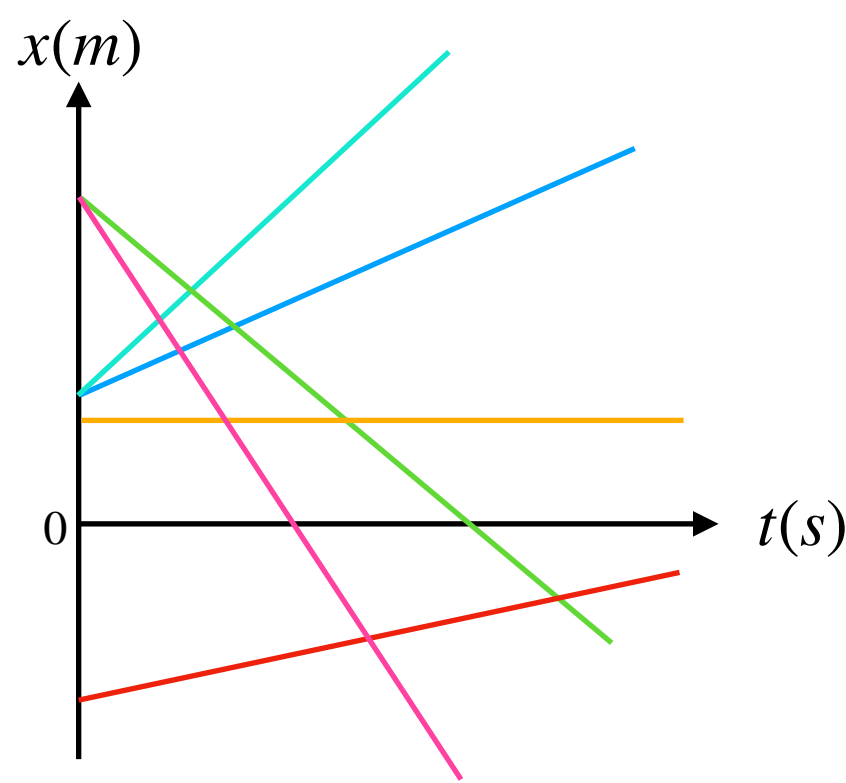
En este caso podemos notar que la pendiente es la misma para todos los puntos $\implies$ la velocidad es la misma siempre $v = v_{prom}$

$$v = v_{prom} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{constante} \equiv v_0$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t$$

Esta ecuación entrega la posición como función del tiempo, $x(t)$ para una partícula que se mueve con velocidad constante v_0 y comienza su movimiento en la posición x_0

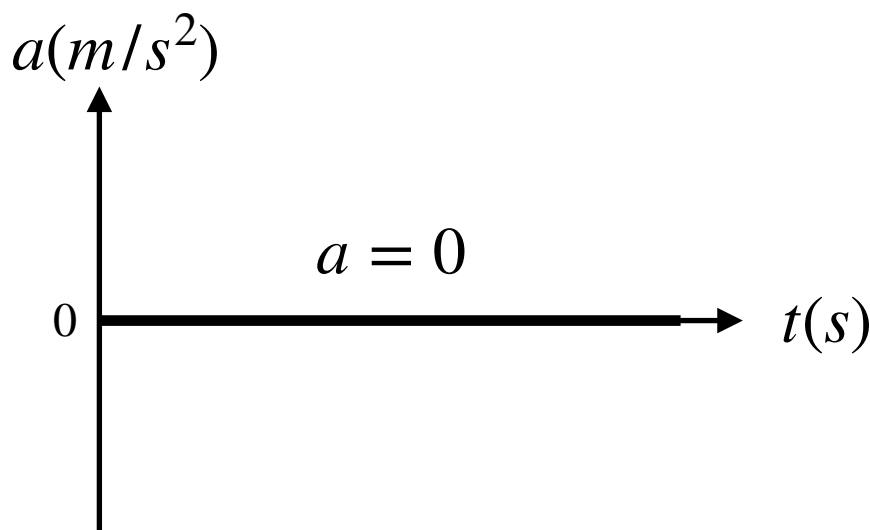
Para este tipo de movimiento, algunos de los gráficos de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo que podemos encontrar son



Las diferentes pendientes indican el tamaño y el signo de la velocidad



Cada movimiento del gráfico del lado izquierdo corresponde a diferentes valores constantes para la velocidad



Por definición, en este tipo de movimiento la aceleración es siempre cero

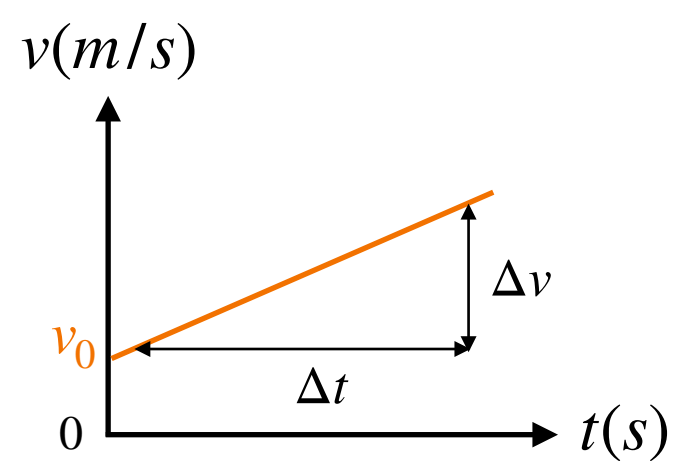
Movimiento uniformemente acelerado (MUA)

Cuando la aceleración es una constante pero diferente de cero, $a = \text{constante}$, se conoce como movimiento uniformemente acelerado (MUA) o movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA). Ya vimos que las ecuaciones para la posición y la velocidad en este caso son

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \quad v(t) = v_0 + a t$$

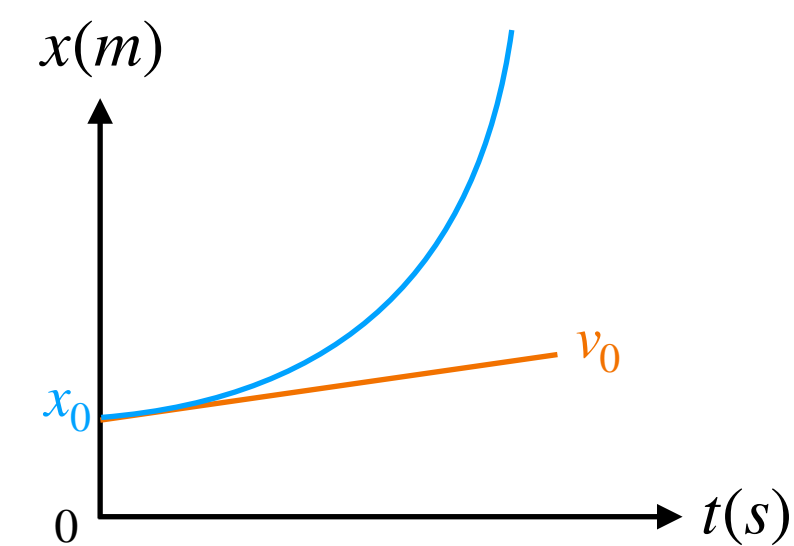
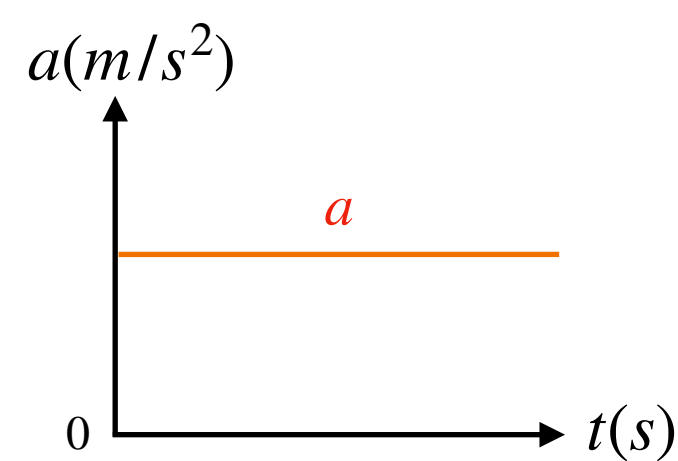
Estas ecuaciones entregan la posición y la velocidad como funciones del tiempo, $x(t)$, $v(t)$ para una partícula que se mueve con aceleración constante a y comienza su movimiento en la posición x_0 con velocidad inicial v_0

Es decir, una ecuación lineal en el tiempo para la velocidad (ecuación de una recta) y una ecuación cuadrática en el tiempo para la posición (ecuación de una parábola). Gráficamente encontramos lo siguiente



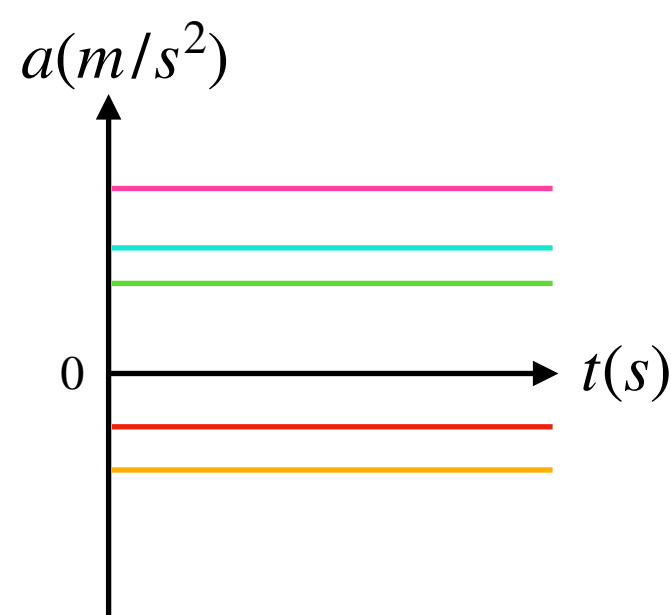
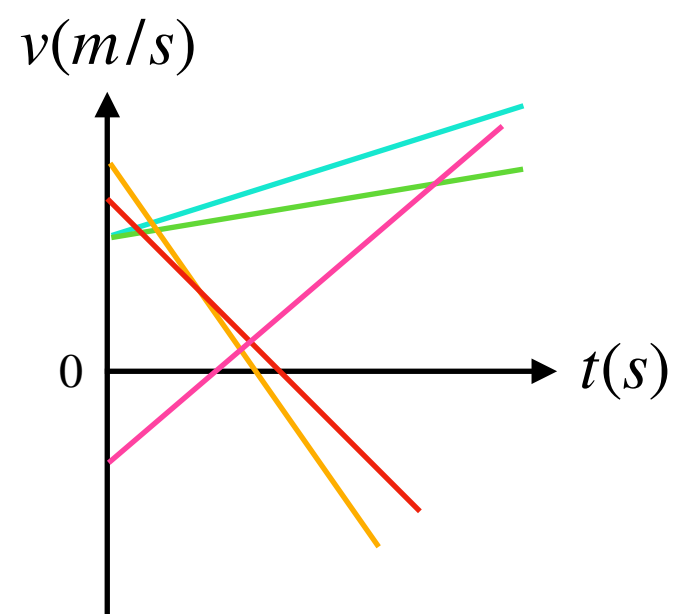
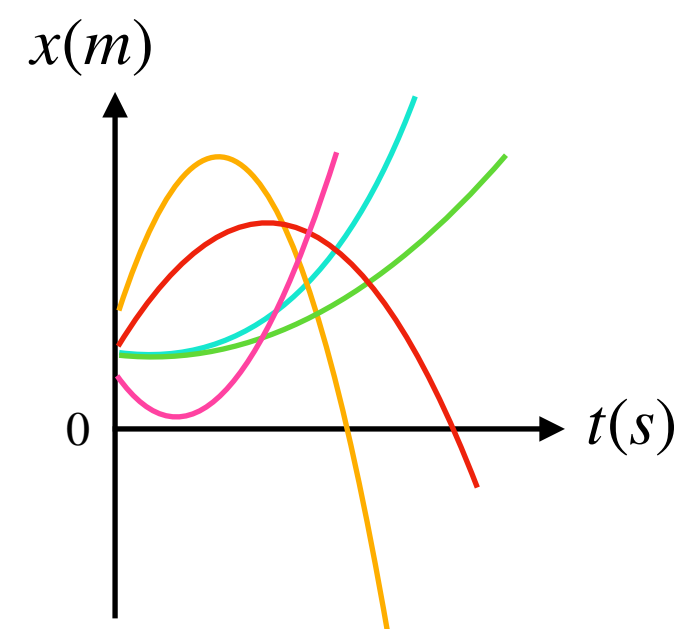
La pendiente es la misma para todos los puntos $\Rightarrow$ la aceleración es la misma siempre $a = a_{\text{prom}}$

$$a = a_{\text{prom}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{constante}$$



El intercepto con el eje y corresponde a la posición inicial x_0 y la pendiente en este punto es la velocidad inicial v_0 . En este caso como $a > 0$ la parábola es cóncava hacia arriba.

Gráficamente, algunas otras situaciones que podemos encontrar



Si combinamos las ecuaciones para la posición y la velocidad, podemos encontrar una ecuación que determina la velocidad en función de la posición

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

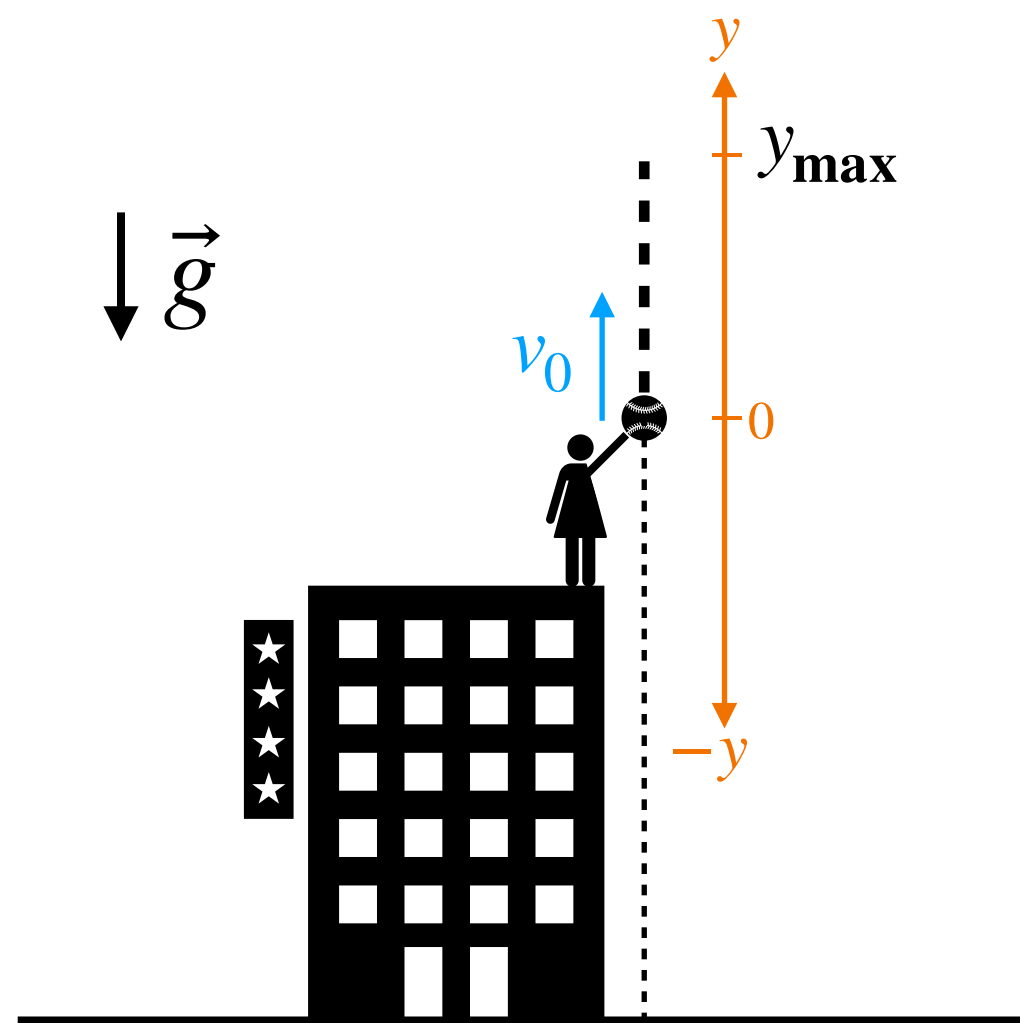
La ecuación que da el tiempo como función de la posición se obtiene a partir de encontrar los ceros de la ecuación cuadrática y es de la forma

$$t = -\frac{v_0}{a} \pm \frac{\sqrt{v_0^2 + 2a(x - x_0)}}{a}$$

Al usar esta ecuación, note que el tiempo tiene que ser estrictamente positivo $t > 0$ (causalidad)

Cuerpos en caída libre

Cualquier cuerpo que se deje caer en la Tierra, experimentará un MUA en donde la aceleración es debido a la atracción gravitacional de la Tierra. Esta aceleración se conoce como aceleración gravitacional $\vec{g}$, tiene un valor de $|\vec{g}| \equiv g = 9.81m/s^2 \simeq 10m/s^2$ y siempre apunta hacia el centro de la Tierra.

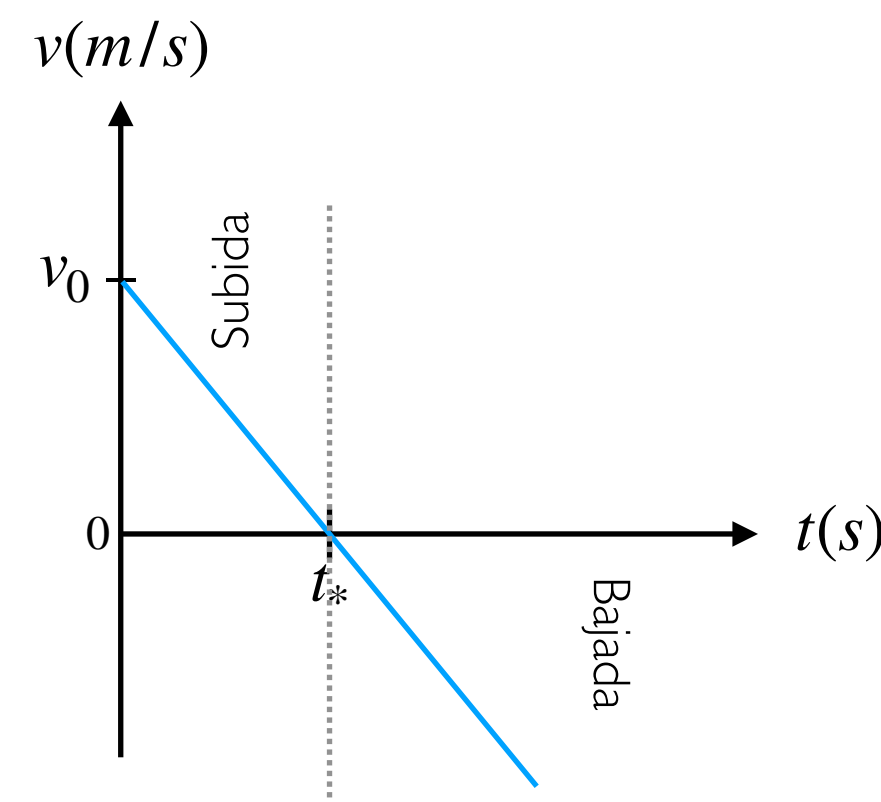
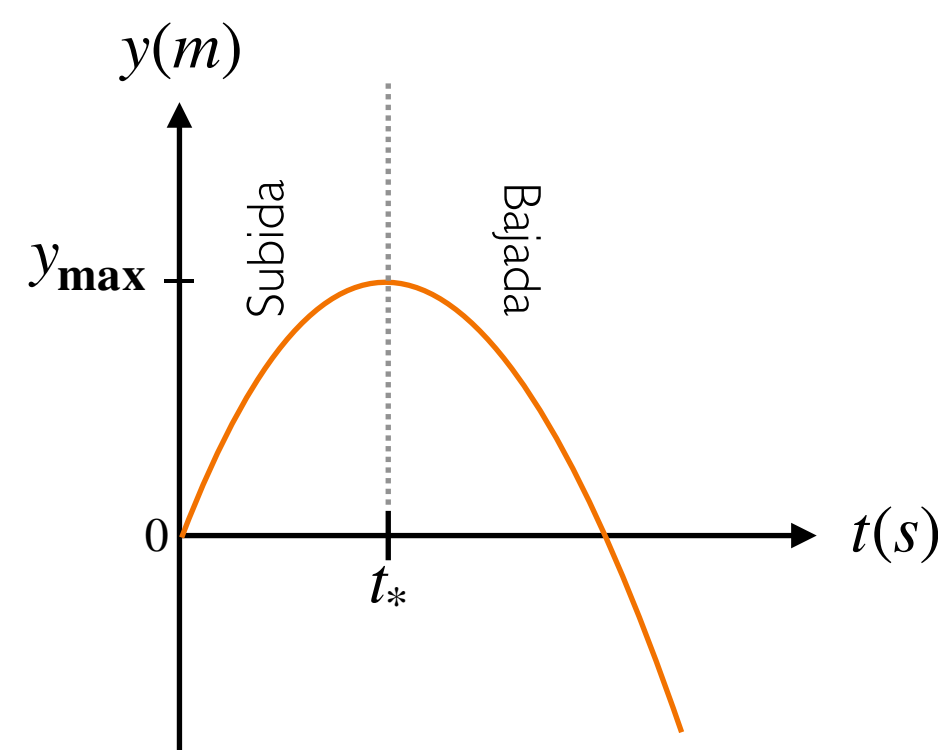


- Usualmente se fija que el movimiento ocurra a lo largo del eje y , de manera que las ecuaciones de movimiento son las mismas que vimos anteriormente pero cambiando $x \leftrightarrow y$

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_y t^2, \quad v(t) = v_0 t + a_y t, \quad v^2 = v_0^2 + 2a_y(y - y_0).$$

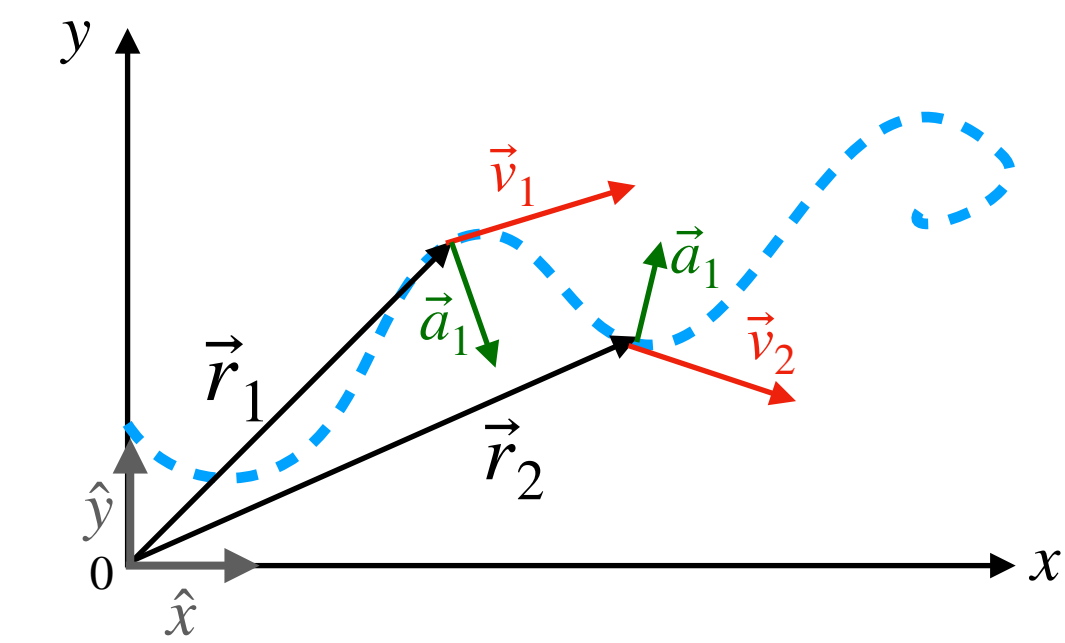
- En la figura, una pelota se lanza hacia arriba con velocidad inicial v_0 . Esta luego de alcanzar una altura máxima $y_{\max}$ en un tiempo $t = t_*$, cae hasta llegar al piso.
- En el **sistema de referencia** de la figura, la posición inicial y_0 de la pelota (su posición en el instante que esta se suelta) coincide con el origen del sistema de coordenadas, es decir $y_0 = 0$.
- En este mismo sistema de referencia, la aceleración es negativa, es decir $a_y = -g = -10m/s^2$.
- En la primera parte del trayecto, cuando la pelota va subiendo, su velocidad va disminuyendo hasta que alcanza $y_{\max}$ en donde momentaneamente su velocidad es cero $v(y_{\max}) = 0$. Luego de esto su velocidad empieza a aumentar hasta llegar al piso.

Gráficamente se tiene lo siguiente:



Movimiento en dos dimensiones

Queremos describir una situación en donde el movimiento de la partícula ocurre en dos dimensiones. Podemos graficar la **trayectoria** de la partícula en el plano cartesiano $x - y$



La posición de la partícula en un instante de tiempo t estará dada por su vector de posición $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1), \quad \vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$$

El vector de velocidad $\vec{v}$ siempre es tangente a la **trayectoria**, mientras que el vector de aceleración $\vec{a}$ siempre apunta hacia la parte cóncava de esta.

En dos dimensiones, los vectores de posición, velocidad y aceleración son

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y}$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{x} + v_y(t)\hat{y}$$

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\hat{x} + a_y(t)\hat{y}$$

Igual que en el caso del movimiento en una dimensión, consideraremos movimientos en donde la aceleración es $\vec{a} = \text{constante}$. En tal caso, las ecuaciones de movimiento tienen la misma forma que en el caso de una dimensión

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2, \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} t$$

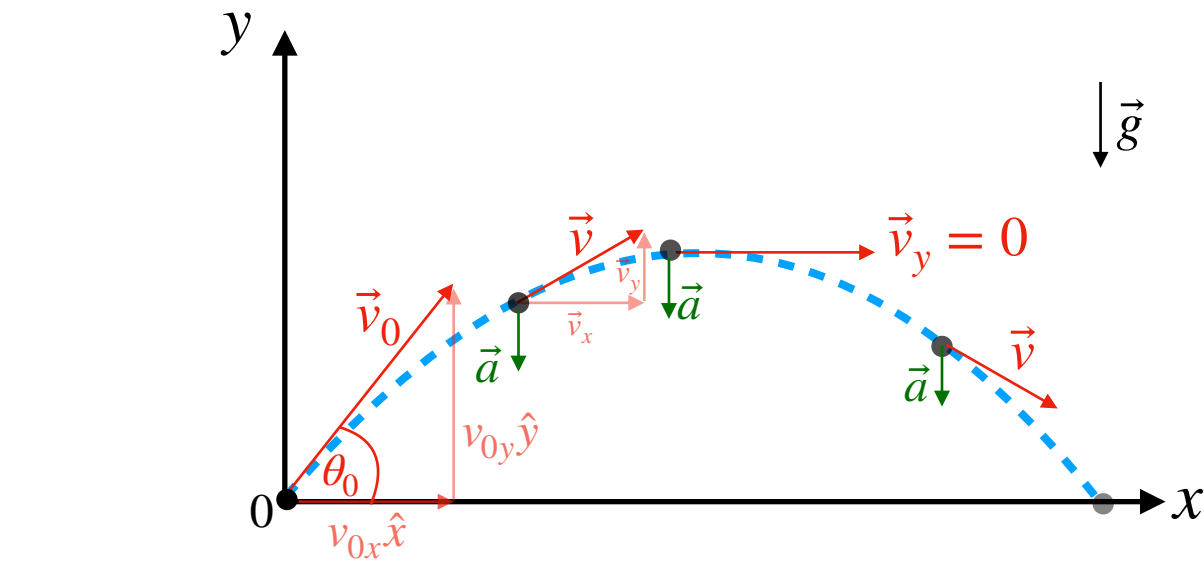
En donde

$$\vec{r}_0 = x_0 \hat{x} + y_0 \hat{y}$$

$$\vec{v}_0 = v_{0x} \hat{x} + v_{0y} \hat{y}$$

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y}$$

En particular, nos interesará estudiar el caso en donde $a_x = 0$ y $a_y = -g$. Es decir un **MRU** en el eje x y un **MUA** en el eje y en donde la aceleración corresponde a la aceleración gravitacional $\vec{g}$. Esto se conoce como *Movimiento Parabólico*.



En esta situación, un cuerpo se lanza con velocidad inicial $\vec{v}_0$ en un ángulo θ_0 . Vamos a desprestigiar el roce con el aire y también consideraremos que la aceleración de gravedad $\vec{g}$ siempre apunta en el eje y

Las componentes de la velocidad inicial $\vec{v}_0$ son

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta_0$$

Con $v_0 = |\vec{v}_0|$

Fijamos la posición inicial en el origen, es decir

$$x_0 = y_0 = 0$$

Por lo tanto las ecuaciones de movimiento en cada eje coordenado son

Eje x :

$$x(t) = v_{0x} \cos \theta_0 t$$

$$v_x = v_{0x} \cos \theta_0$$

Eje y :

$$y(t) = v_{0y} \sin \theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_y(t) = v_{0y} \sin \theta_0 - g t$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2 g y$$



FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Física I - FIS1510

Dinámica: Leyes de Newton, Trabajo y Energía, Momentum lineal

Profesor: Rafael Bravo

rafael.bravo@uc.cl

Dinámica: Fuerzas

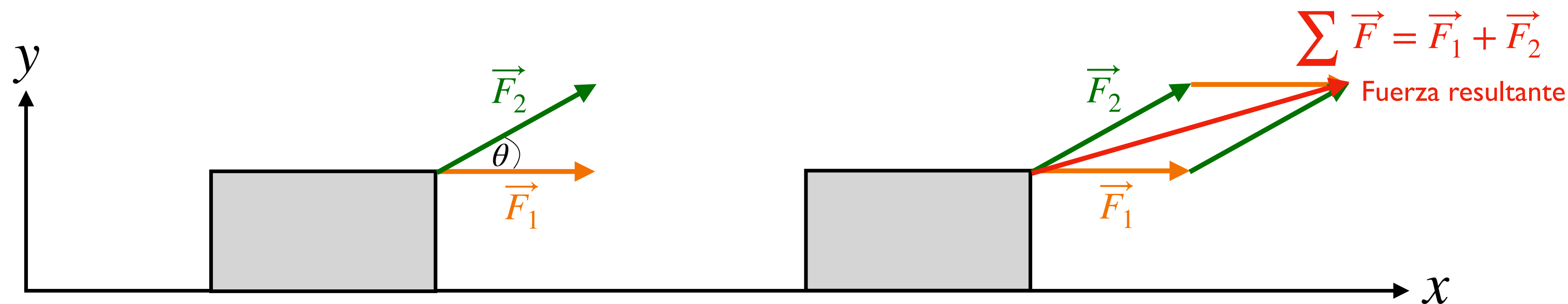
Estudiaremos las causas que provocan el movimiento o cambios en el estado físico de un sistema: Fuerzas $\vec{F}$

Fuerza

- Es una cantidad **vectorial** la cual es capaz de modificar el movimiento de un cuerpo. Su unidad de medida en el sistema internacional (SI) es el Newton N. $1\text{N} = 1\text{kg m/s}^2$. Las fuerzas se pueden medir con un **dinamómetro**



- Cuantifica la **interacción** entre dos cuerpos o entre un cuerpo y un entorno. Pueden ser de contacto o de largo alcance
- Se pueden superponer: el efecto de varias fuerzas aplicadas al mismo punto de un cuerpo es el mismo que el de una sola fuerza igual a la suma (vectorial) de todas las demás. **La suma de las fuerzas se llama fuerza neta o resultante**



Es conveniente hacer la suma por componentes

$$\sum \vec{F} = \sum F_x \hat{x} + \sum F_y \hat{y}$$

$$\sum F_x = |\vec{F}_2| \cos \theta + |\vec{F}_1|$$

$$\sum F_y = |\vec{F}_2| \sin \theta$$

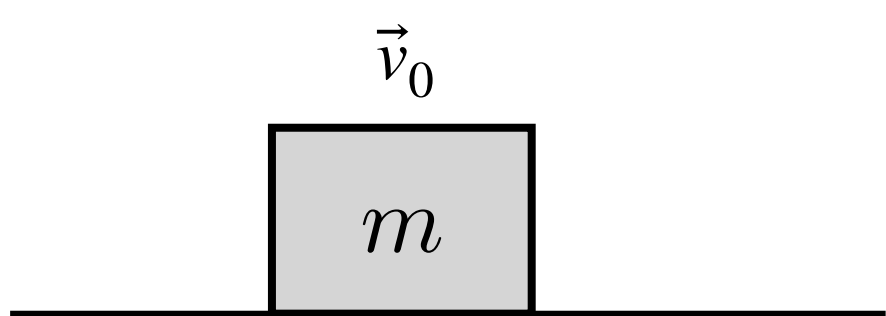
Leyes del movimiento de Newton

¿De qué manera las fuerzas se relacionan y alteran el movimiento? $\Rightarrow$ Leyes de Newton

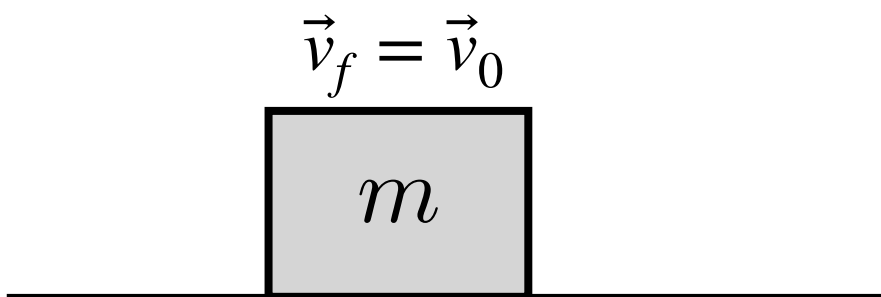
1ª Ley: Ley de la Inercia

En ausencia de fuerzas externas, un cuerpo en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme, permanecerá en ese estado de movimiento.

$$\sum \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$$



$$\sum \vec{F} = 0 \implies$$

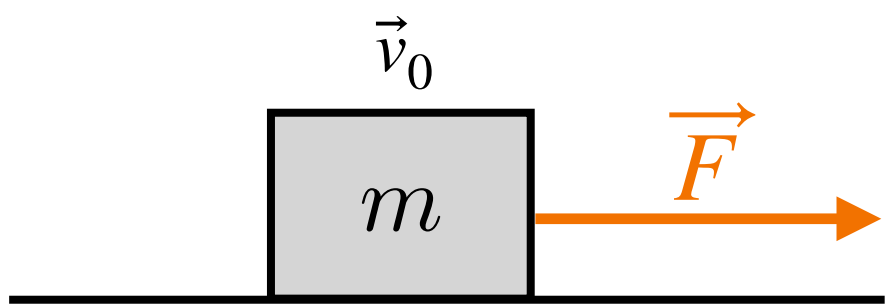


m :medida de la inercia

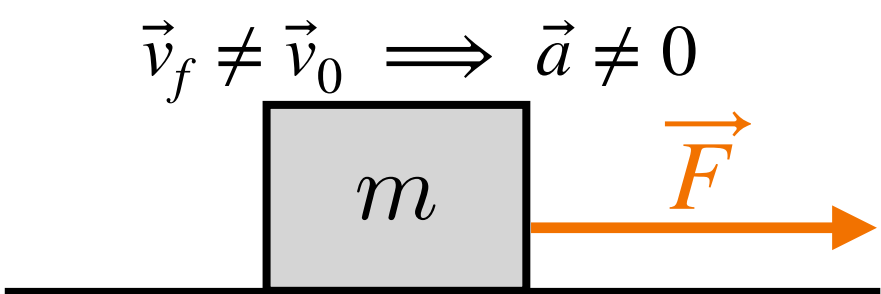
2ª Ley de Newton

La aceleración de un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre este e inversamente proporcional a su masa

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$



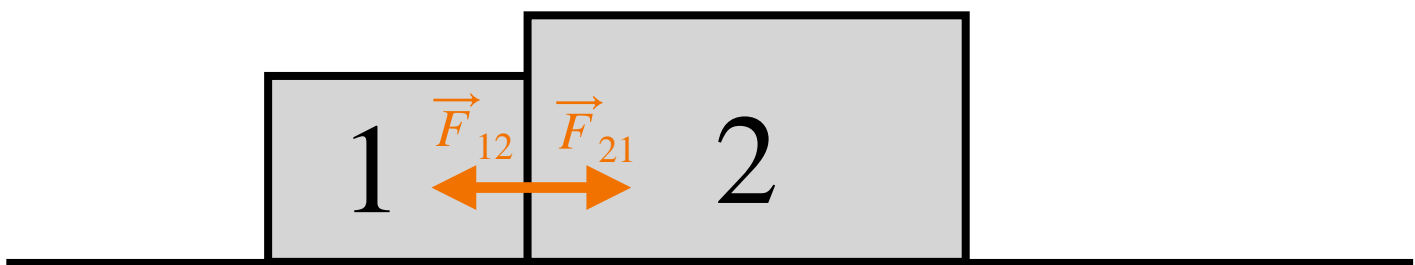
$$\sum \vec{F} \neq 0 \implies$$



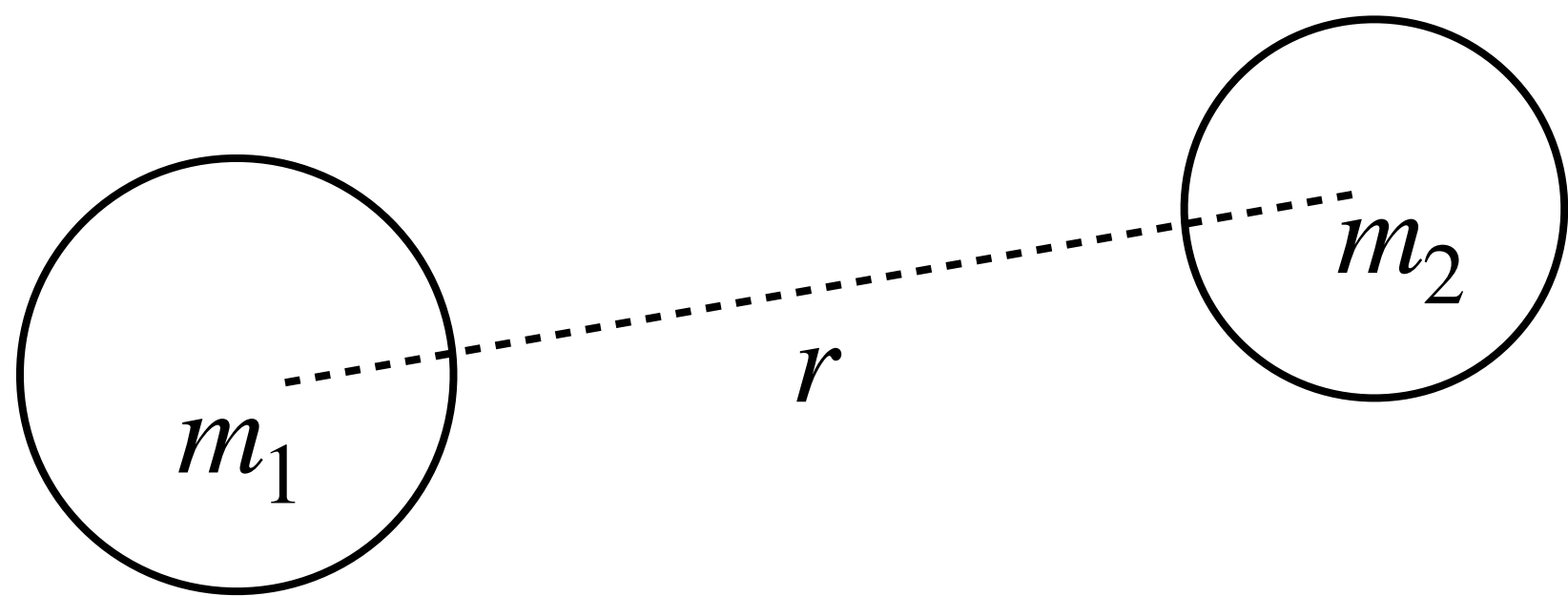
3ª Ley: Acción y reacción

Si dos cuerpos interactúan, la fuerza $\vec{F}_{12}$ que ejerce el cuerpo 1 sobre el cuerpo 2, es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza $\vec{F}_{21}$ que ejerce el cuerpo 2 sobre el cuerpo 1

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



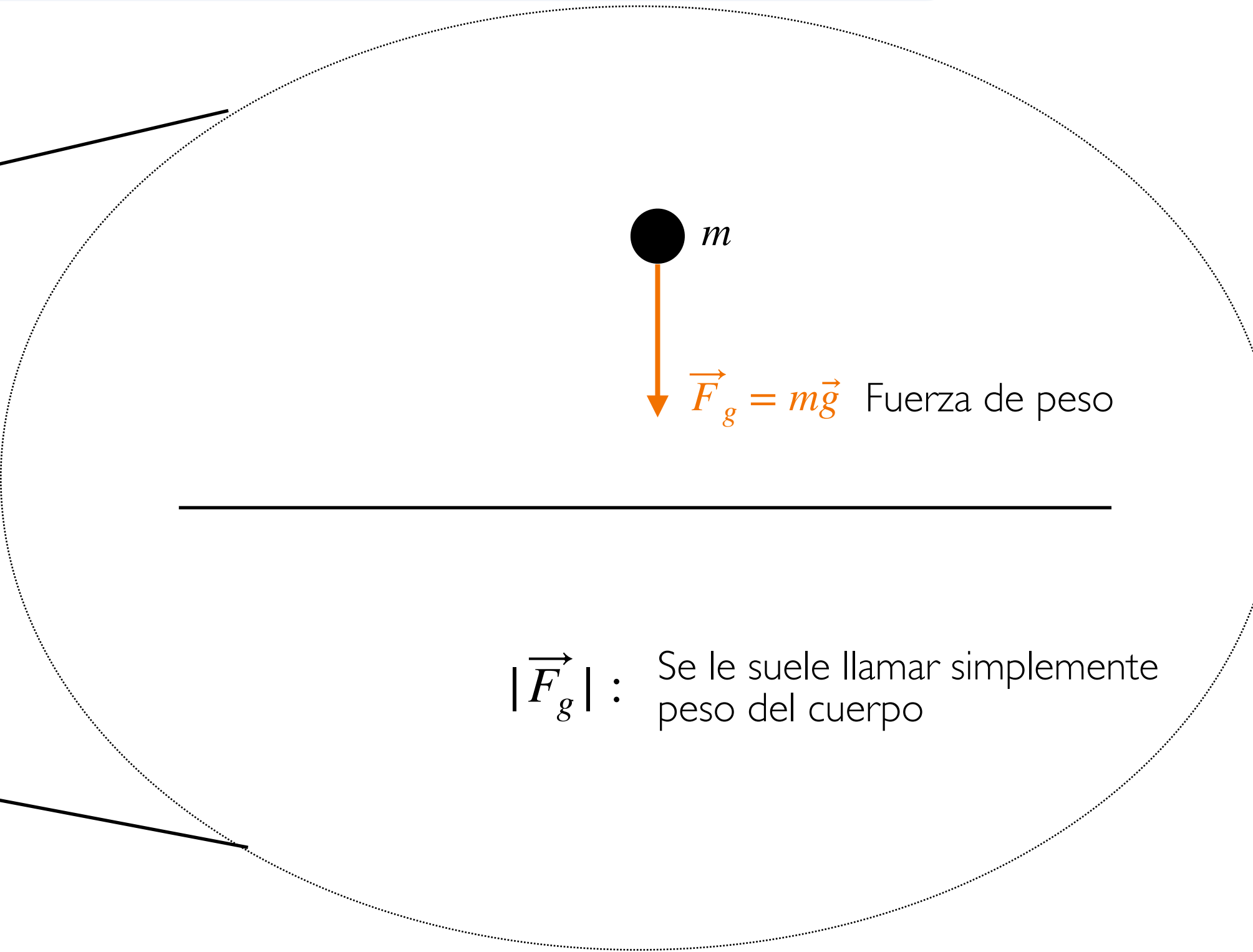
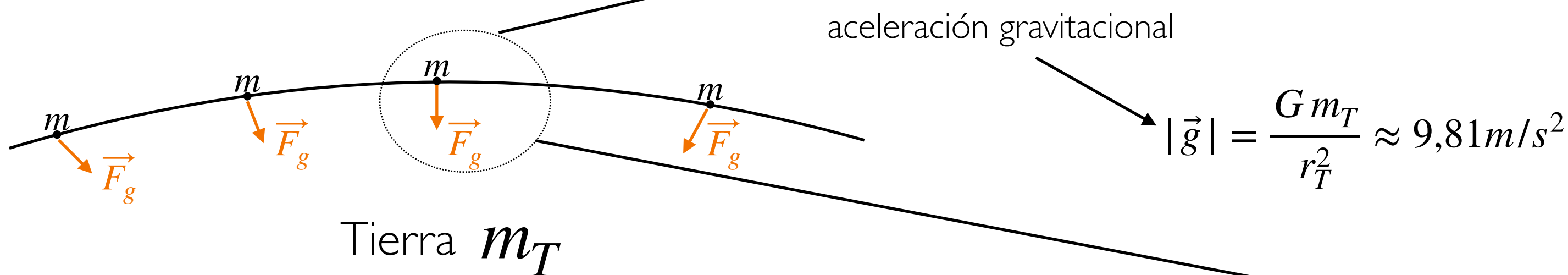
Fuerza gravitacional y peso



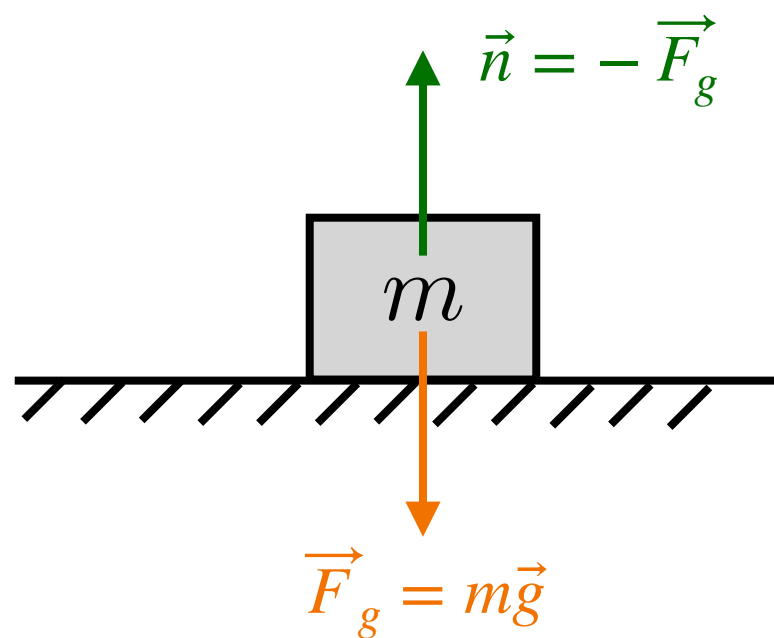
Ley de Gravitación Universal

La fuerza de atracción entre cualquier par de objetos con masa viene dada por $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$

La Tierra ejerce una fuerza de atracción, llamada fuerza de peso o fuerza gravitacional $\vec{F}_g$, la cual atrae a todos los cuerpos masivos hacia el centro de ella.



Un cuerpo en reposo sobre una superficie no sigue cayendo hacia el centro de la tierra. Esto es debido a que la superficie ejerce una fuerza de reacción, perpendicular a ella, la cual se opone a la fuerza de peso. A esta fuerza de reacción se le llama fuerza normal $\vec{n}$



Como el cuerpo permanece en **equilibrio estático**, la fuerza neta sobre él es cero, entonces se tiene que

$$\sum \vec{F} = \vec{n} + \vec{F}_g = 0$$
$$\implies \vec{n} = -\vec{F}_g$$

Diagrama de cuerpo libre, las leyes del movimiento en acción

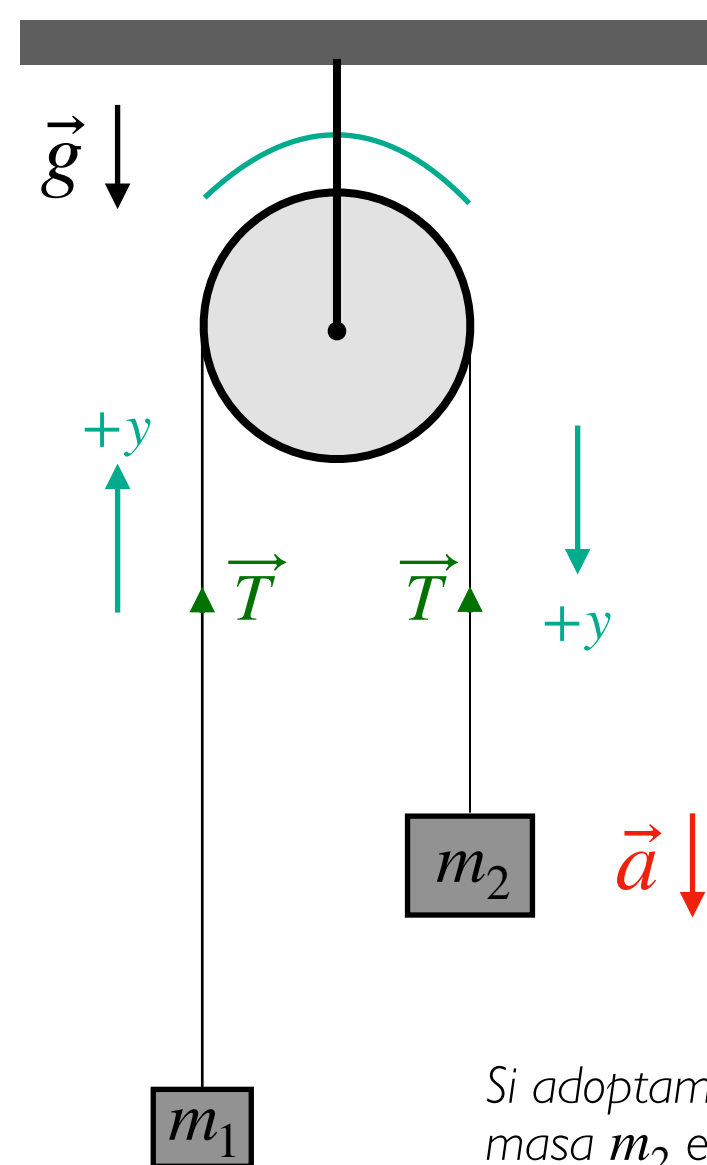
Un diagrama de cuerpo libre (DCL) es una representación que se utiliza para analizar las fuerzas que actúan sobre un cuerpo o sistema. Para construirlo se considera un cuerpo como un punto y se dibujan todas las fuerzas que actúan sobre este.

Las leyes de Newton nos permiten encontrar ya sea una fuerza que esté actuando sobre un cuerpo o la aceleración que este experimenta producto de la fuerza.

Consideremos el siguiente ejemplo en donde a partir de un DCL encontraremos una fuerza de reacción (tensión) y la aceleración de un sistema.

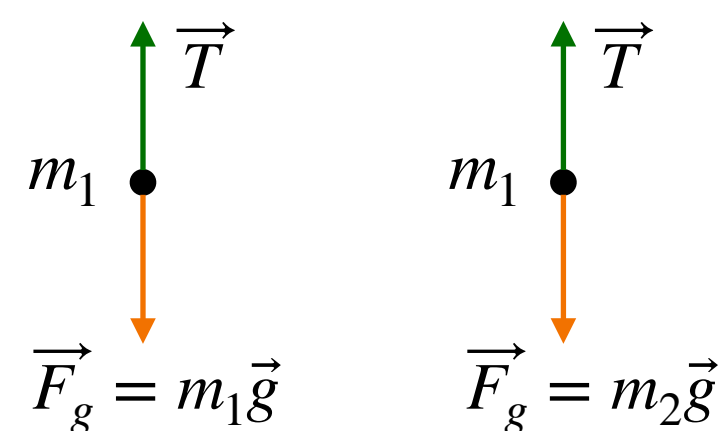
Máquina de Atwood

Una Máquina de Atwood consiste en dos masas suspendidas que se encuentran conectadas a través de un hilo de masa despreciable, el cuál pasa alrededor de una polea. Ambas masas sienten una fuerza de tensión $\vec{T}$ que tira de ellas. Como el sistema se encuentra en presencia de la aceleración de gravedad, este experimentará un movimiento con cierta aceleración $\vec{a}$ que dependerá de la diferencia entre las masas. Si $m_2 > m_1$, el sistema acelerará de manera que el cuerpo de masa m_2 bajará y m_1 subirá.



Si adoptamos la convención de que el sentido del movimiento de la masa m_2 es tal que la aceleración del sistema $\vec{a}$ es positiva. Entonces, en este caso, para la masa m_2 su peso tendrá signo positivo y la tensión signo negativo. Con esta misma convención, para la masa m_1 , la tensión tendrá signo positivo y su peso signo negativo. Como el movimiento es en una dimensión, escogemos el eje y como sistema de referencia.

DCL



Escribiendo la segunda Ley de Newton para cada masa, se tiene que

$$\begin{aligned} m_1 : \quad \sum F_y &= T - m_1 g = m_1 a \\ m_2 : \quad \sum F_y &= m_2 g - T = m_2 a \end{aligned}$$

Si sumamos estas ecuaciones, o lo que es equivalente a escribir la segunda Ley para todo el sistema, se tiene que

$$(m_2 - m_1)g = (m_1 + m_2)a$$

De aquí podemos encontrar la aceleración a del sistema como

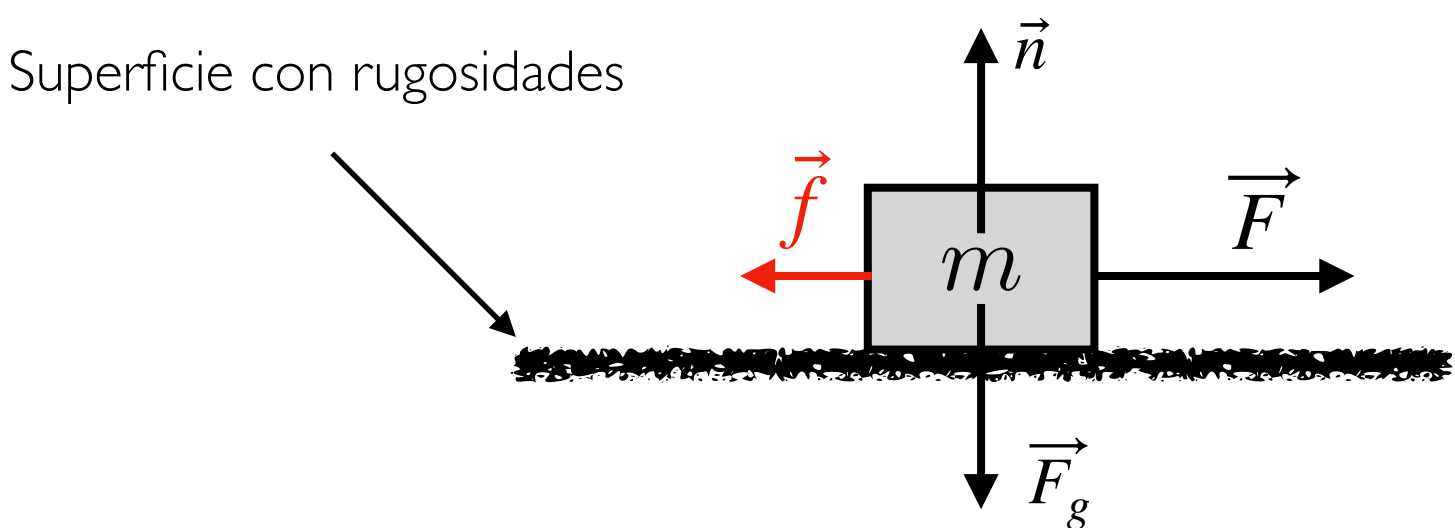
$$a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) g$$

Ahora, si reemplazamos la aceleración que encontramos en cualquiera de las ecuaciones del equilibrio de fuerzas, se encuentra que

$$T = \left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) g$$

Fuerza de roce o fricción

En situaciones realistas, aparece una fuerza que siempre se opone al movimiento de los cuerpos debido a imperfecciones en la estructura que los compone. Esta fuerza se conoce como fuerza de roce o fricción $\vec{f}$

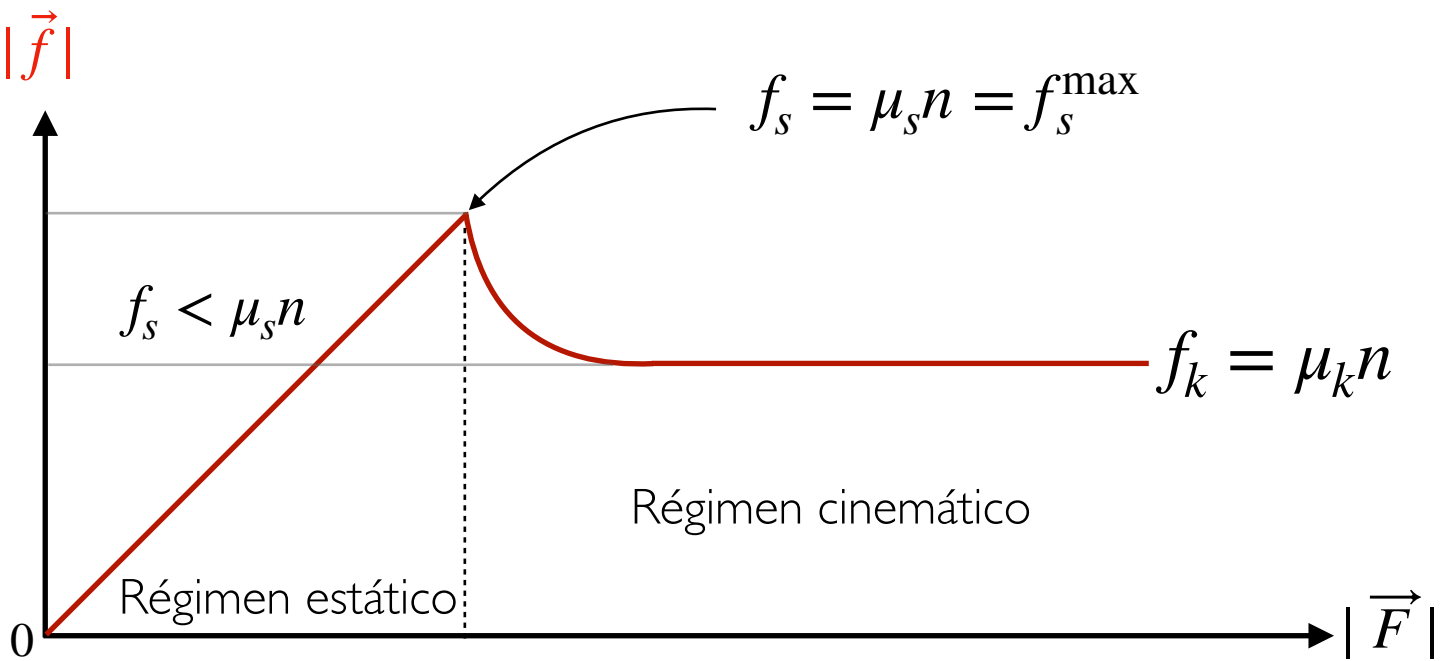


La fuerza de roce es una “transferencia horizontal” de la fuerza normal $\vec{n}$ a través de un coeficiente adimensional μ . Podemos separarla en el régimen estático (cuando aplicamos una fuerza externa y el cuerpo no se mueve) y el régimen cinemático (cuando el cuerpo sale de la inercia y se empieza a mover)

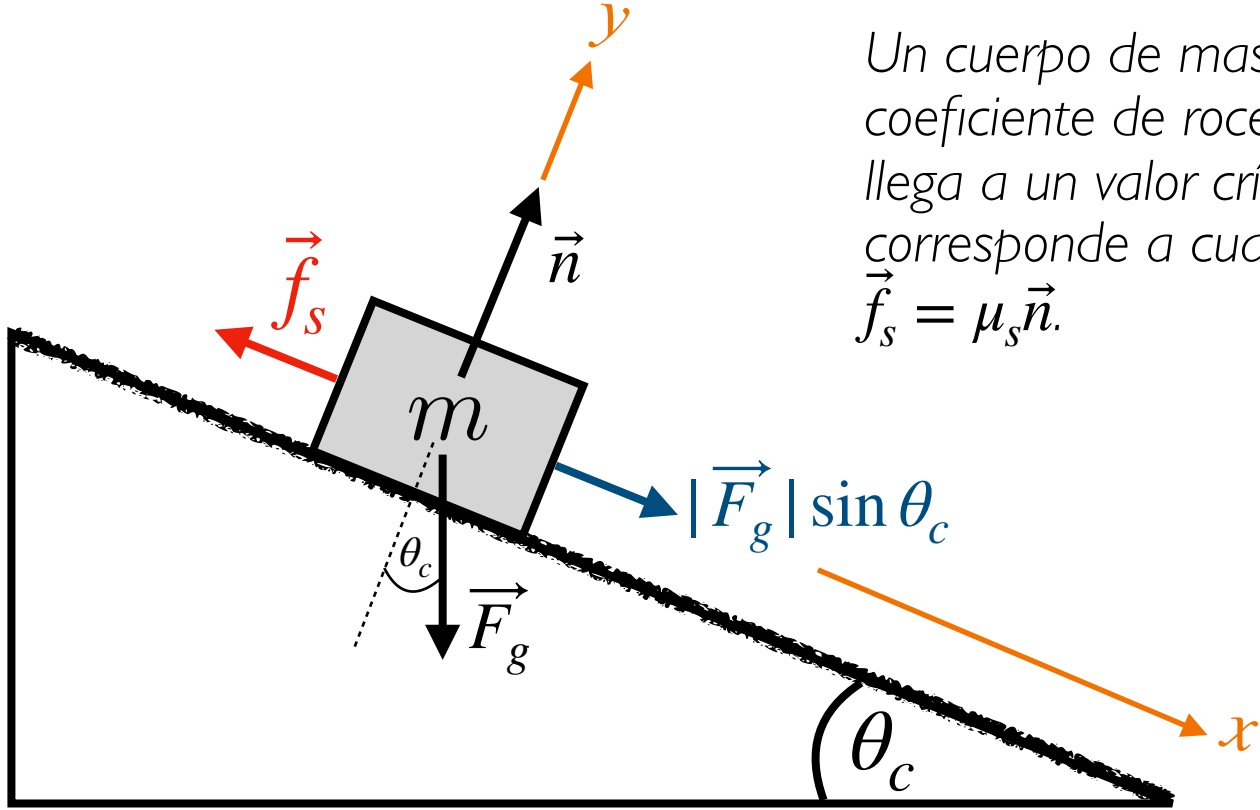
$\vec{f}_s \leq \mu_s \vec{n} \Rightarrow$ Fuerza de roce **estática**
 $\mu_s \rightarrow$ coeficiente de roce estático

$\vec{f}_s = \mu_k \vec{n} \Rightarrow$ Fuerza de roce **cinemática**
 $\mu_k \rightarrow$ coeficiente de roce cinemático

Si representamos gráficamente el comportamiento de $|\vec{f}|$ a medida que se aplica una fuerza externa $|\vec{F}|$



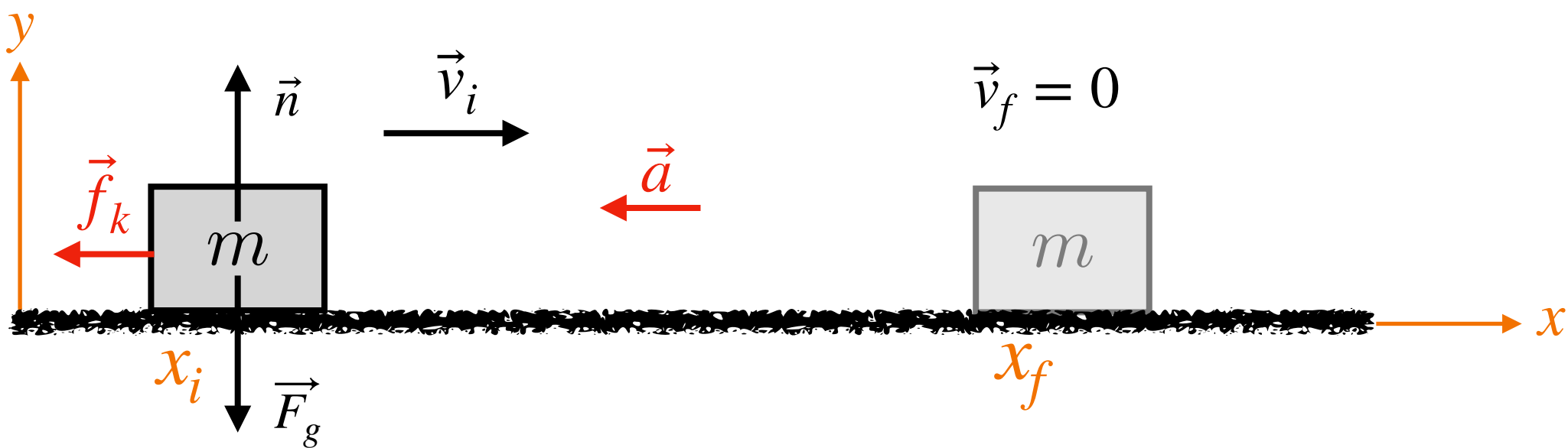
Determinación de los coeficientes de roce



Un cuerpo de masa m se deja sobre un plano inclinado con cierto coeficiente de roce estático μ_s . A medida que el ángulo θ se incrementa, llega a un valor crítico θ_c en donde el cuerpo empezará a moverse. Esto corresponde a cuando la fuerza de roce estática alcanza la igualdad $\vec{f}_s = \mu_s \vec{n}$.

$$\sum \vec{F} = 0$$
$$\sum F_x = mg \sin \theta - f_s = 0$$
$$\sum F_y = n - mg \cos \theta = 0$$
$$\mu_s = \tan \theta_c$$

Un cuerpo de masa m se lanza desde la posición x_i con velocidad inicial v_i en una superficie con cierto coeficiente de roce cinemático μ_k hasta que se detiene en la posición x_f . La fuerza de roce cinemática $\vec{f}_k = \mu_k \vec{n}$ se encarga de frenar (desacelerar) al cuerpo.



$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$
$$\sum F_x = -f_k = ma$$
$$\sum F_y = n - mg = 0$$

$$a = -\mu_k g$$
$$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$$

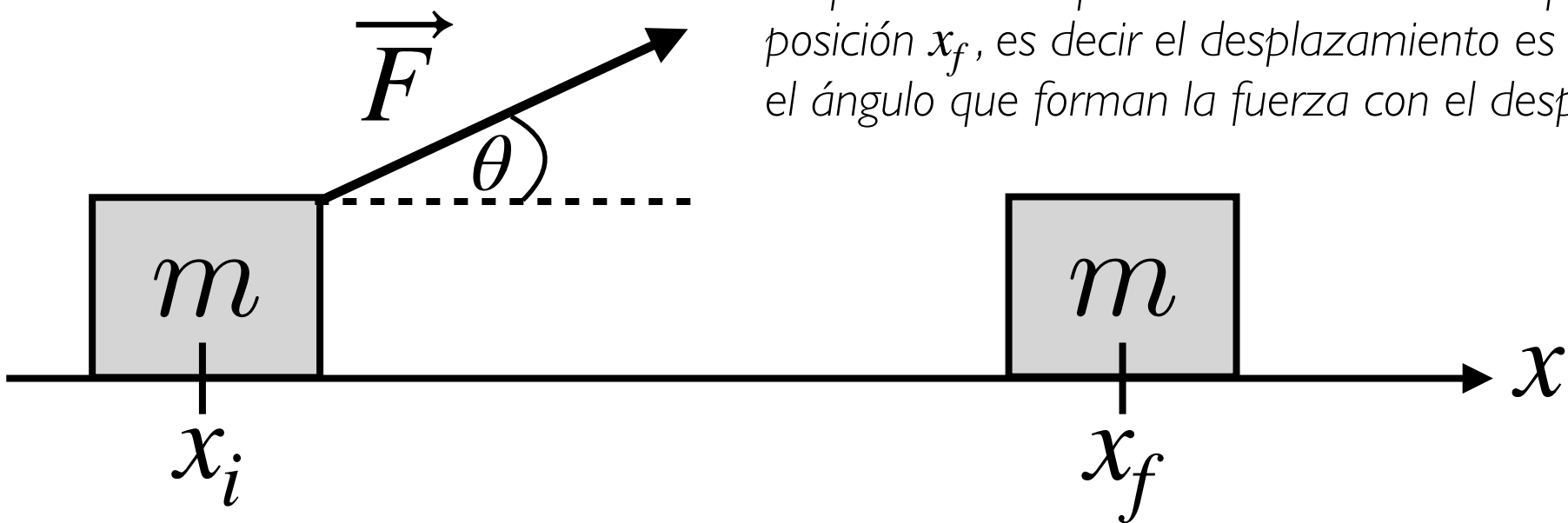
$$\mu_k = \frac{v_i^2}{2g(x_f - x_i)}$$

Trabajo y energía

La **Energía** es una cantidad (escalar) física, que da cuenta de la capacidad que tiene un cuerpo o un sistema para poder realizar un **Trabajo Mecánico**. La Energía puede ser transferida y transformada. Es una cantidad conservada

Trabajo Mecánico

Consideremos la acción de una fuerza $\vec{F}$ (constante) la cuál desplaza al cuerpo de masa m desde la posición x_i hasta la posición x_f , es decir el desplazamiento es $\Delta\vec{x} = \vec{x}_f - \vec{x}_i$. θ es el ángulo que forman la fuerza con el desplazamiento



Se define el trabajo mecánico W a través del producto punto $\cdot$ entre la fuerza y el desplazamiento

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{x} = |\vec{F}| |\Delta\vec{x}| \cos \theta$$

Es una medida de la transferencia de energía que la fuerza ejerce sobre un sistema. En el Sistema Internacional (SI), se mide en Joules (J). $1J = 1\text{ kg m}^2 / \text{s}^2$

Por simplicidad consideremos que la fuerza actúa de manera paralela al eje x , es decir $\vec{F} = F \hat{x}$, de manera que el trabajo en este caso será simplemente $W = F\Delta x$. Ahora incluyamos explícitamente el cambio en la **velocidad** del cuerpo producto de la acción de la fuerza



A partir de la Segunda Ley de Newton, sabemos que el cuerpo acelerará de acuerdo a $F = ma$. Por otra parte, a partir de las ecuaciones de la cinemática del MUA sabemos que $v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$. Si despejamos la aceleración de esta última ecuación $a = (v_f^2 - v_i^2) / \Delta x$, y la reemplazamos en la Segunda Ley, encontramos que $F\Delta x = m(v_f^2 - v_i^2) / 2$.

A la cantidad $\frac{1}{2}mv^2$ se le llama **Energía Cinética** y se denota por la letra K

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Siguiendo con el procedimiento anterior, encontramos que $F\Delta x = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$. Es decir $F\Delta x = K_f - K_i = \Delta K$. Pero el lado izquierdo de esta ecuación es el trabajo mecánico W

Teorema Trabajo-Energía

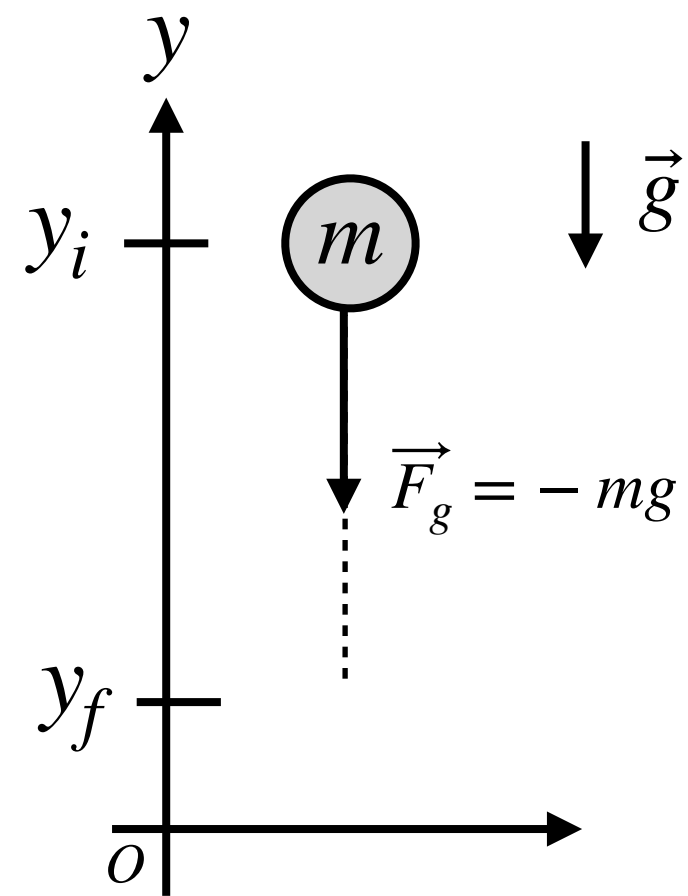
El Trabajo Mecánico realizado por la fuerza neta que actúa sobre un sistema, es igual al cambio en la Energía Cinética de este

$$W = \Delta K$$

Otras formas de Energía: Energía Potencial Gravitacional

La Energía Cinética que encontramos anteriormente se debe a la velocidad que tiene un cuerpo en movimiento. Un cuerpo en reposo en un campo gravitacional también tiene una energía almacenada con el *potencial* de transformarse en Energía Cinética. A esta energía se le llama **Energía Potencial Gravitatoria**.

Consideremos un cuerpo de masa m en caída libre debido a la acción de la fuerza de peso $\vec{F}_g$. Calculemos el trabajo realizado por esta fuerza entre dos puntos de la trayectoria y_i e y_f .



El trabajo realizado por el peso es

$$\begin{aligned} W &= \vec{F}_g \cdot \Delta \vec{y} \\ &= -mg(y_f - y_i) \end{aligned}$$

A la cantidad mgy se le llama **Energía Potencial Gravitacional** y se denota por la letra U

$$U = mgy$$

Re-escribiendo el trabajo en términos de U se encuentra que

$$\begin{aligned} W &= -(U_f - U_i) \\ W &= -\Delta U \end{aligned}$$

Anteriormente habíamos encontrado que además

$$W = \Delta K$$

Por consecuencia

$$\Delta K = -\Delta U$$

Si reordenamos la última expresión, encontramos que

$$\begin{aligned} K_f - K_i &= -(U_f - U_i) \\ K_i + U_i &= K_f + U_f \end{aligned}$$

A la combinación $K + U$ se le llama **Energía Mecánica** y se denota simplemente con la letra E

Es decir estamos encontrando que $E_i = E_f \implies E_f - E_i = 0$, que dicho de otro modo es

$$\Delta E = 0$$

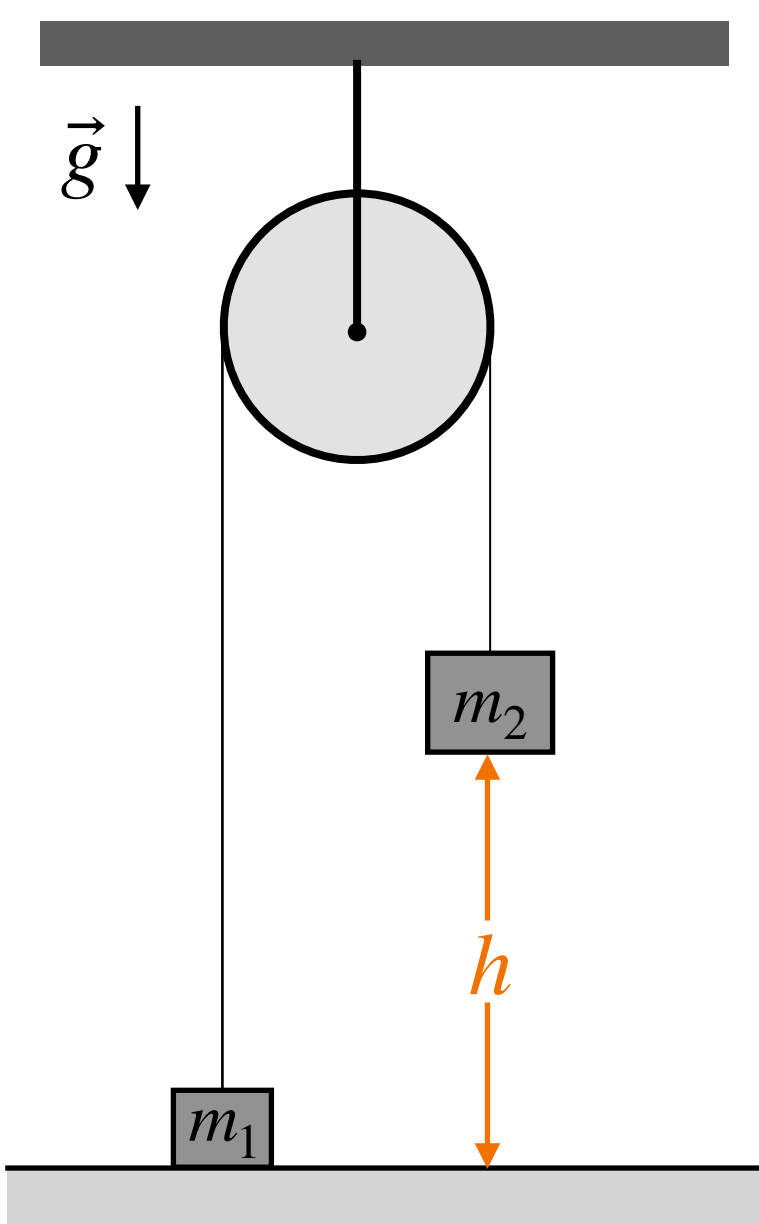
Esto se conoce como la conservación de la Energía Mecánica de un sistema aislado

Si escribimos explícitamente esta expresión en término de la posición y las velocidades encontramos que

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f$$

Aquí podemos ver como la energía potencial se transforma en energía cinética (y vice versa). Esta transformación se balancea adecuadamente de manera que la energía mecánica se conserve.

Ejemplo: conservación de la energía mecánica



Consideremos nuevamente la Máquina de Atwood, pero esta vez el bloque de masa m_1 reposa sobre una superficie. Al igual que antes $m_2 > m_1$ de manera que el bloque de masa m_2 recorre una distancia h hasta que alcanza la superficie. Cuando este último haya llegado a la superficie, el bloque de masa m_1 se encontrará a la altura h . Sin embargo seguirá subiendo un poco más. Utilizando la conservación de la energía, nos interesa encontrar:

- La velocidad del bloque de masa m_2 cuando el bloque de masa m_1 haya alcanzado la superficie.
- La altura máxima (o la diferencia de altura) que alcanza el bloque de masa m_2 .

Si el sistema parte del reposo, podemos notar que solo la energía potencial gravitacional de m_2 contribuye a la energía mecánica inicial del sistema $\Rightarrow E_i = m_2gh$.

Cuando el bloque m_2 haya alcanzado la superficie con alguna velocidad v , toda su energía potencial se habrá transferido al resto del sistema; como energía cinética para él, y para m_1 tanto en energía cinética como también energía potencial, es decir $E_f = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + m_1gh$. Note que como las masas están conectadas, su velocidad es la misma (al menos hasta que m_2 impacta con la superficie). Solo basta aplicar la conservación de la energía para poder encontrar v .

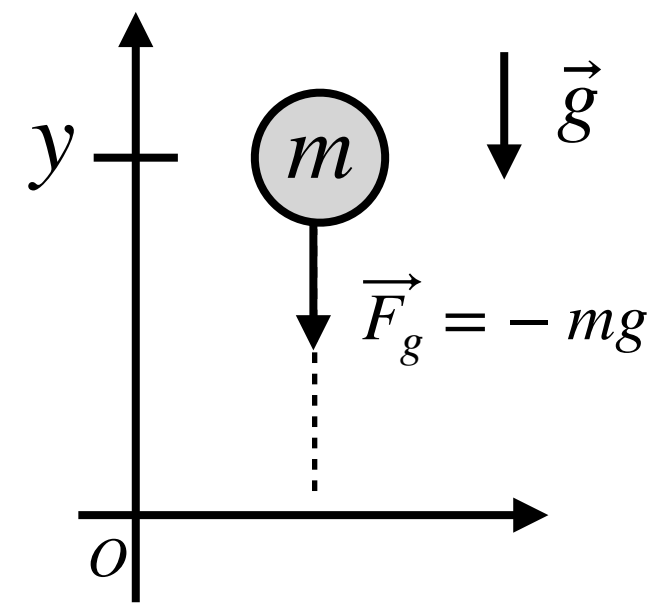
$$E_i = E_f \Rightarrow m_2gh = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + m_1gh. \text{ Reordenando esta expresión, podemos encontrar que } v = \sqrt{2gh \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)}$$

Para encontrar la altura máxima $h_{\max}$ que alcanza m_1 , notamos que cuando se encuentra a la altura h tiene la velocidad que encontramos anteriormente y luego de esto se comportará como un objeto en lanzamiento vertical e irá perdiendo esta velocidad hasta que alcance $h_{\max}$ con velocidad igual a cero. Esta situación términos de la conservación de la energía mecánica se puede escribir como $\frac{1}{2}m_2v^2 + m_2gh = m_2gh_{\max}$, de donde podemos encontrar $\frac{v^2}{2} = g(h_{\max} - h) = g\Delta h \Rightarrow \Delta h = \frac{v^2}{2g}$, en donde si reemplazamos la velocidad que encontramos anteriormente, encontramos que

$$\Delta h = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}h \quad \text{o que} \quad h_{\max} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}h$$

Fuerzas conservativas

En algunas situaciones existe una relación entre la Fuerza y la Energía Potencial



En el caso del cuerpo en caída libre la fuerza de peso y la energía potencial gravitacional, respectivamente son

$$F_g = -mg, \quad U = mgy$$

Es posible notar, que la fuerza de peso se puede obtener a partir de la energía potencial gravitacional como

$$-\frac{dU}{dy} = -\frac{d}{dy}(mgy) = -mg = F_g, \quad \implies F_g = -\frac{dU}{dy}$$

Siempre que una Fuerza se pueda expresar como (menos) la derivada de alguna Energía Potencial con respecto a alguna coordenada, diremos que la Fuerza es **Conservativa**

$$F_x = -\frac{dU}{dx}, \quad F_y = -\frac{dU}{dy}, \quad F_z = -\frac{dU}{dz}$$

Aquí consideramos las componentes de alguna fuerza. Cuando la fuerza es conservativa, el trabajo realizado por esta es independiente de la trayectoria del movimiento

Calculemos nuevamente el trabajo realizado por una fuerza pero esta vez consideremos que la fuerza puede variar. En este caso, si por ejemplo la fuerza varía en función de la coordenada x y esta solo tiene componente en este eje, es decir $\vec{F} = F_x \hat{x}$, el trabajo entre x_i y x_f estará dado la integral

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

- Usando la Segunda Ley de Newton para F_x como $F_x = ma = m \frac{dv}{dt}$ en la integral anterior, encontramos que

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \int_{x_i}^{x_f} m \frac{dv}{dt} dx = m \int_{v_i}^{v_f} dv \frac{dx}{dt} = m \int_{v_i}^{v_f} v dv = m \frac{v^2}{2} \Big|_{v_i}^{v_f} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \Delta K$$

- Si además usamos el hecho de que la fuerza es conservativa, es decir $F_x = -\frac{dU}{dx}$, se tiene que

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = - \int_{x_i}^{x_f} \frac{dU}{dx} dx = - \int_{U_i}^{U_f} dU = -(U_f - U_i) = -\Delta U$$

Si igualamos ambos resultados, obtenemos nuevamente la conservación de la Energía Mecánica $\Delta K + \Delta U = 0$. Como el nombre lo sugiere, una fuerza conservativa es aquella en donde se cumple la conservación de la energía

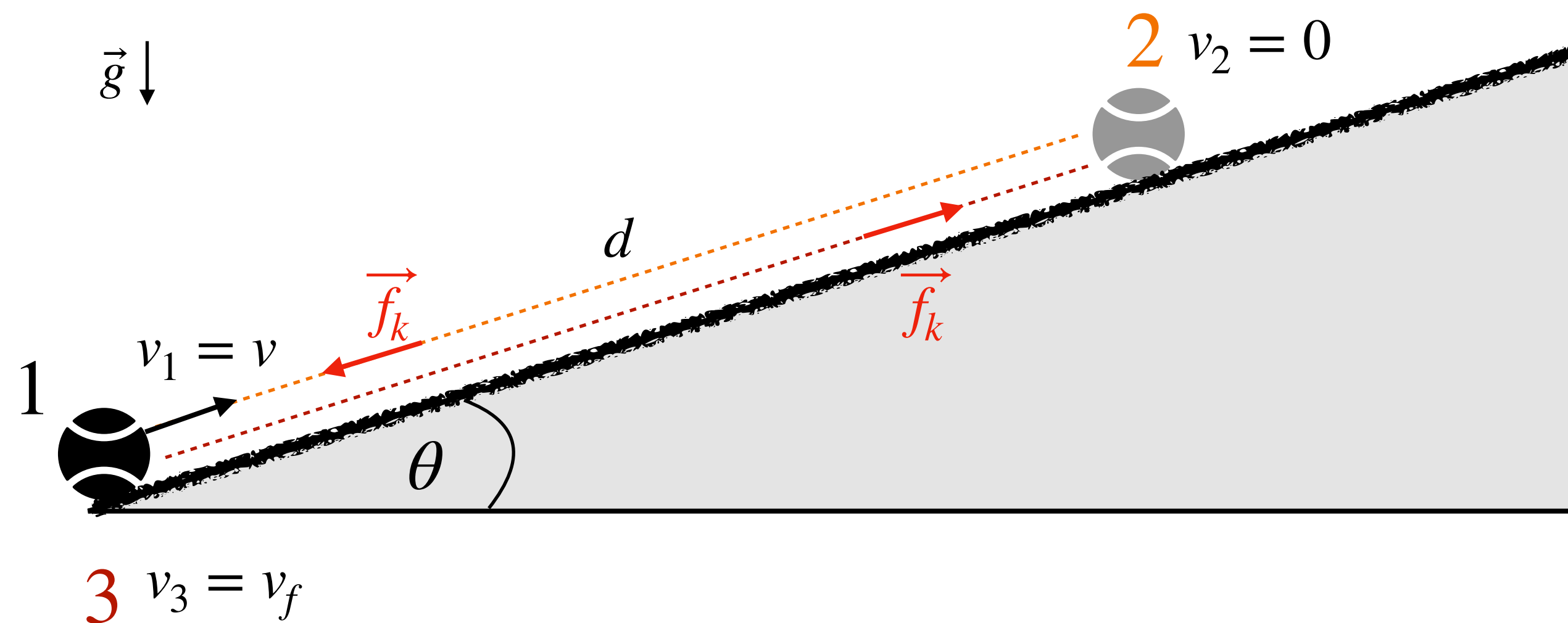
Fuerzas externas (o no conservativas)

En el caso de la partícula en caída libre, el sistema se encuentra **aislado** de la presencia de **fuerzas externas**. Si tales fuerzas externas aparecen, entonces la conservación de la energía mecánica debe incluir el efecto del trabajo efectuado por dichas fuerzas. En ese caso, la conservación de la energía mecánica se modifica de acuerdo a

$$\Delta K + \Delta U = W_{\text{ext}}$$

En algunos casos a las fuerzas externas se le suele llamar **fuerzas no conservativas**. Ejemplos de fuerzas no conservativas son la fuerza de roce o la fuerza efectuada por la presión en un fluido.

Ejemplo: Una pelota de masa m se lanza con una velocidad v hacia arriba por un plano inclinado con roce. La pelota luego de recorrer una distancia d se frena para luego bajar nuevamente. ¿Cuál es la variación de la energía cinética (o de la velocidad) de la pelota?



La energía mecánica de la pelota en el punto 1 es $K_1 + U_1 = \frac{1}{2}mv^2$. Cuando la pelota va al punto 2, el trabajo efectuado por la fuerza de roce es $W_r = -f_k d$. Cuando la pelota vuelve al origen en el punto 3, su energía mecánica es $K_3 + U_3 = \frac{1}{2}mv_f^2$. En este mismo trayecto, el roce hace un trabajo $W_r = -f_k d$.

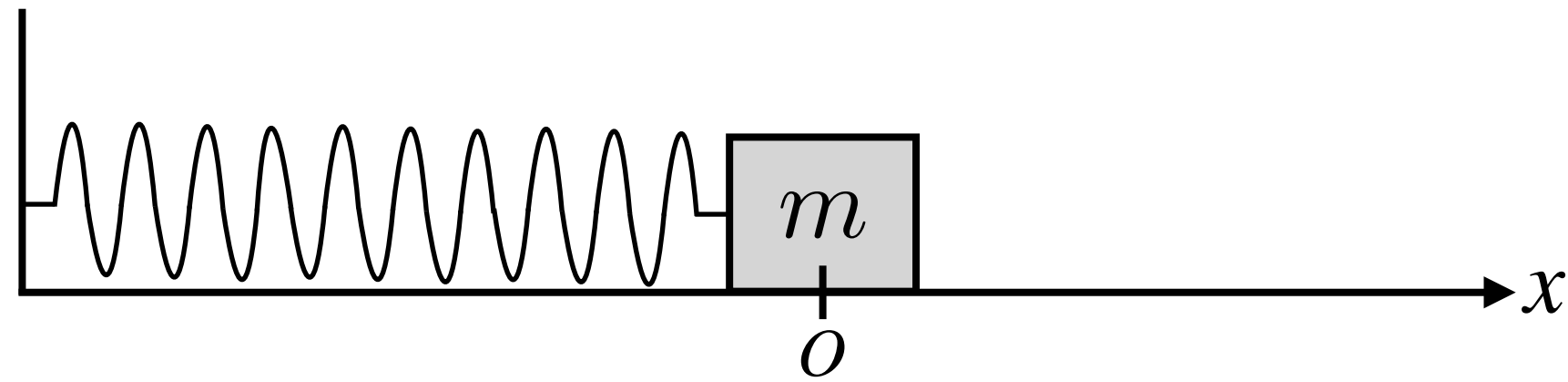
La variación de la energía mecánica en el camino de ida y vuelta es $\Delta K + \Delta U = (K_3 - K_1) + (U_3 - U_1) = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v^2)$. Por otra parte, el trabajo total efectuado por el roce en este trayecto es $W_{\text{ext}} = -2f_k d$. Usando la conservación de la energía mecánica $\Delta K + \Delta U = W_{\text{ext}}$, encontramos que

$$v_f^2 = v^2 - 4f_k d/m$$

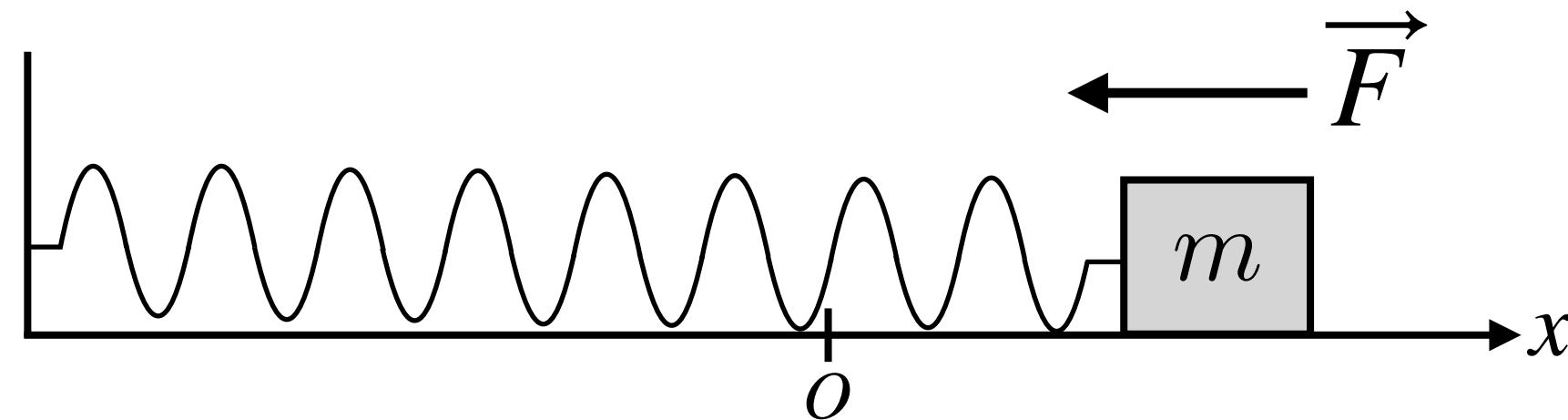
Debido a la fuerza de roce, la velocidad final con la que la pelota vuelve al punto de partida es menor a la velocidad a inicial con la que se lanzó. En ausencia de roce, las velocidades hubiesen sido las mismas.

Fuerza Elástica

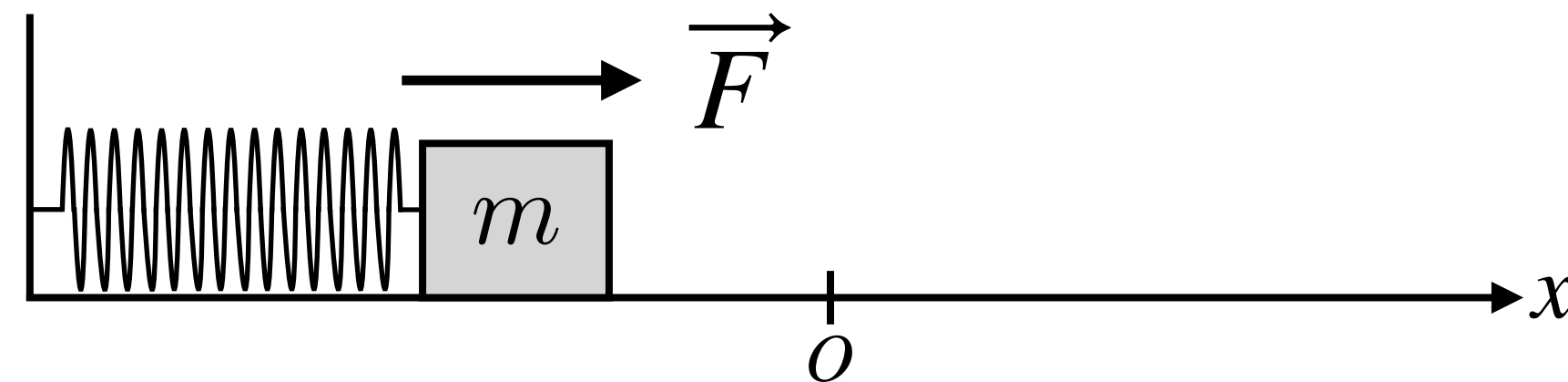
Un ejemplo de una fuerza no constante, pero conservativa, es la que podemos encontrar en un resorte



Cuando el resorte se encuentra en su posición natural, el cuerpo de masa m no siente ninguna fuerza en el eje x , $\vec{F} = 0$

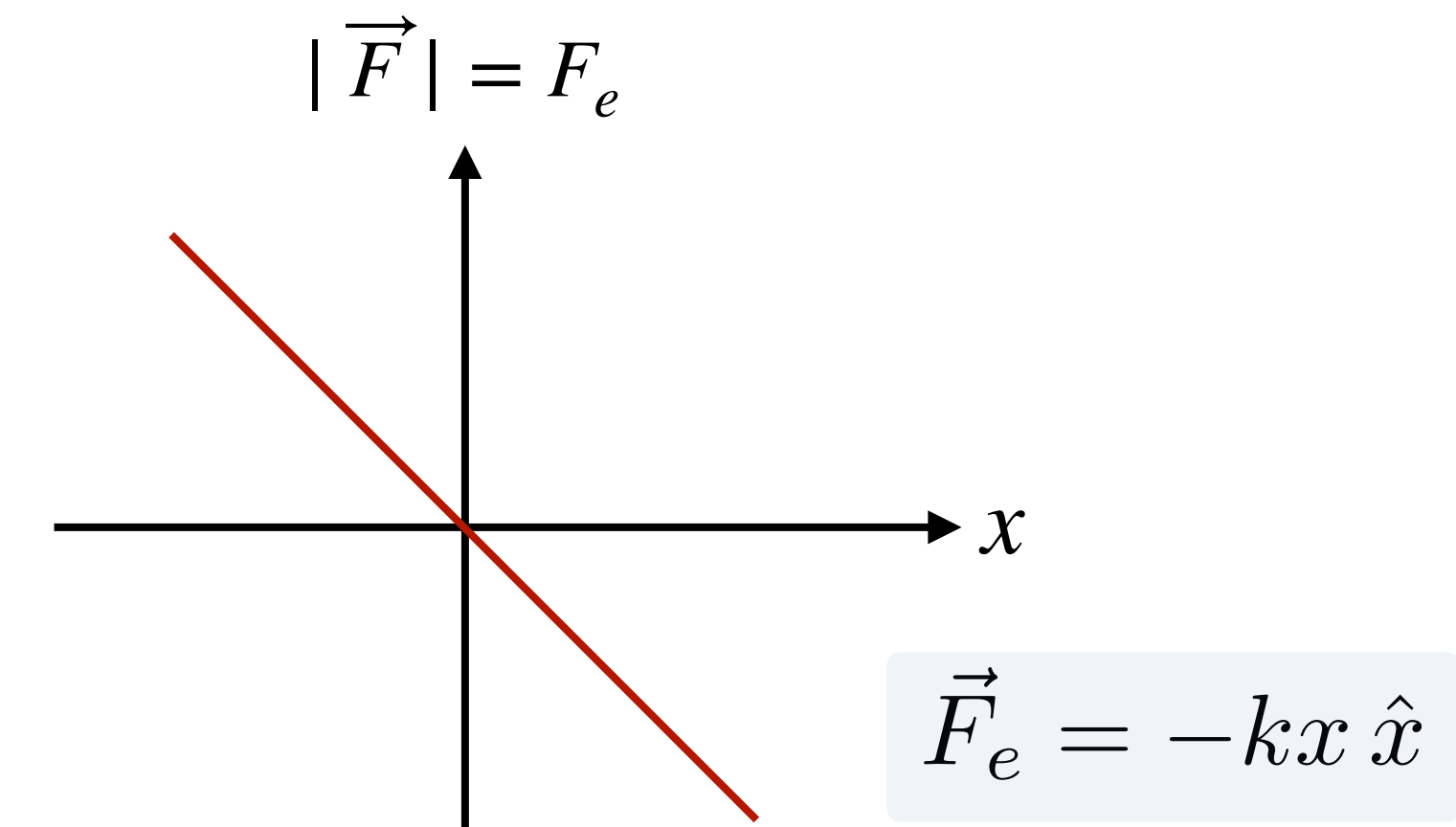


Cuando el resorte se estira, este quiere volver a su posición natural, de manera que ahora el cuerpo de masa m siente ninguna fuerza en la dirección negativa del eje x , $\vec{F} = -F \hat{x}$



Cuando el resorte se comprime, al querer nuevamente volver a su posición natural, este hace que el cuerpo de masa m siente ninguna fuerza en la dirección positiva del eje x , $\vec{F} = F \hat{x}$

El comportamiento de la fuerza que ejerce el resorte se puede resumir en el siguiente gráfico



$\vec{F}_e$ se conoce como la fuerza elástica y a la constante k se le dice la constante elástica o constante del resorte. El comportamiento del gráfico se conoce como la **Ley de Hooke**.

Si calculamos el trabajo efectuado por el resorte entre dos puntos x_i y x_f se encuentra que

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_e dx = \int_{x_i}^{x_f} -kx dx = -k \frac{x^2}{2} \Big|_{x_i}^{x_f} = - \left(\frac{kx_f^2}{2} - \frac{kx_i^2}{2} \right) = -\Delta U_e$$

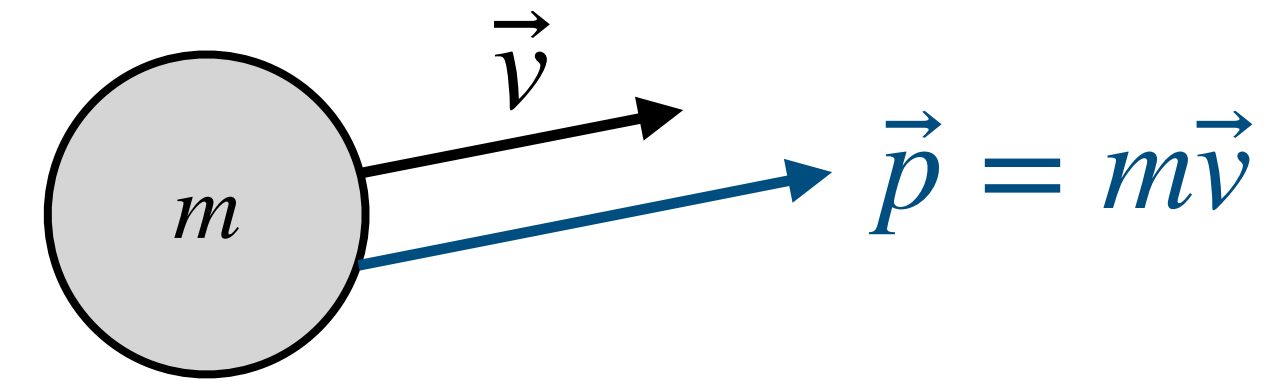
En donde hemos definido la Energía Potencial Elástica U_e como

$$U_e = \frac{1}{2} kx^2$$

Momentum lineal

Cuando calculamos el trabajo realizado por una fuerza no constante, reescribimos la Segunda Ley de Newton como $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$. Si consideramos a la masa m como una cantidad constante, podemos dar un paso adicional y escribirla como $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$. A la cantidad vectorial $m\vec{v}$ se le llama **Momentum Lineal** y se denota como $\vec{p}$.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

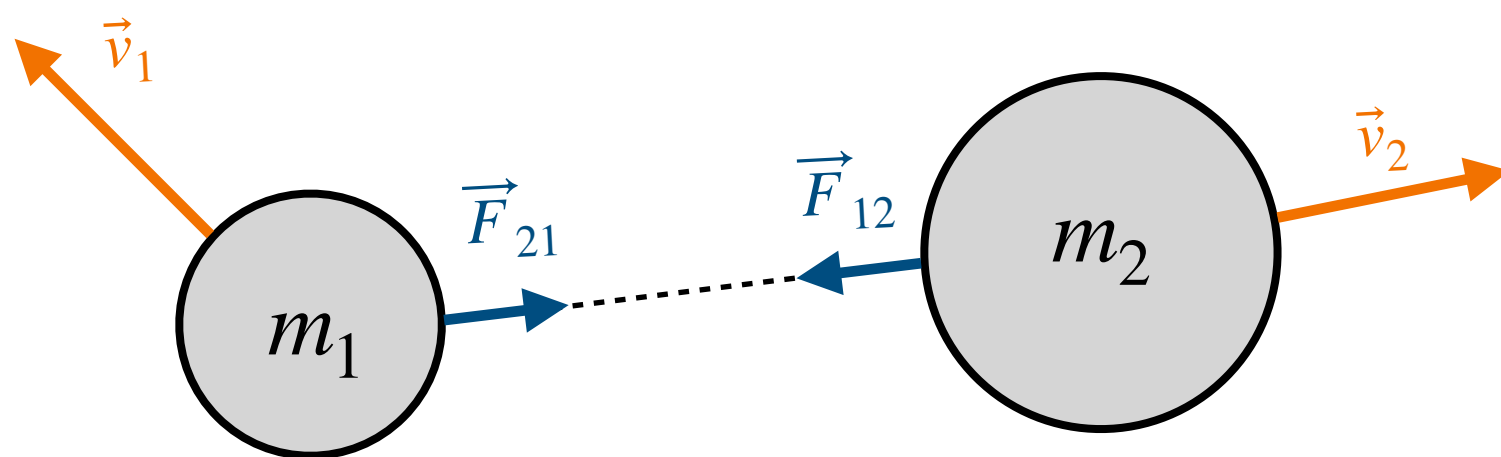


Podemos reescribir la segunda Ley de Newton en términos del Momentum Lineal como $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. Esto nos permite reinterpretar la Ley de la Inercia (1ª Ley)

$$\sum \vec{F} = 0 \implies \vec{a} = 0 \iff \sum \vec{F} = 0 \implies \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Es decir, la cantidad $\vec{p}$ es una constante para todo tiempo t . Por lo tanto, es una cantidad conservada, $\vec{p}_f = \vec{p}_i \implies \Delta\vec{p} = 0$ *Conservación del Momentum Lineal*

Si dos cuerpos de masas m_1 y m_2 , con velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ respectivamente, en ausencia de fuerzas externas, interactúan únicamente por sus fuerzas de reacción

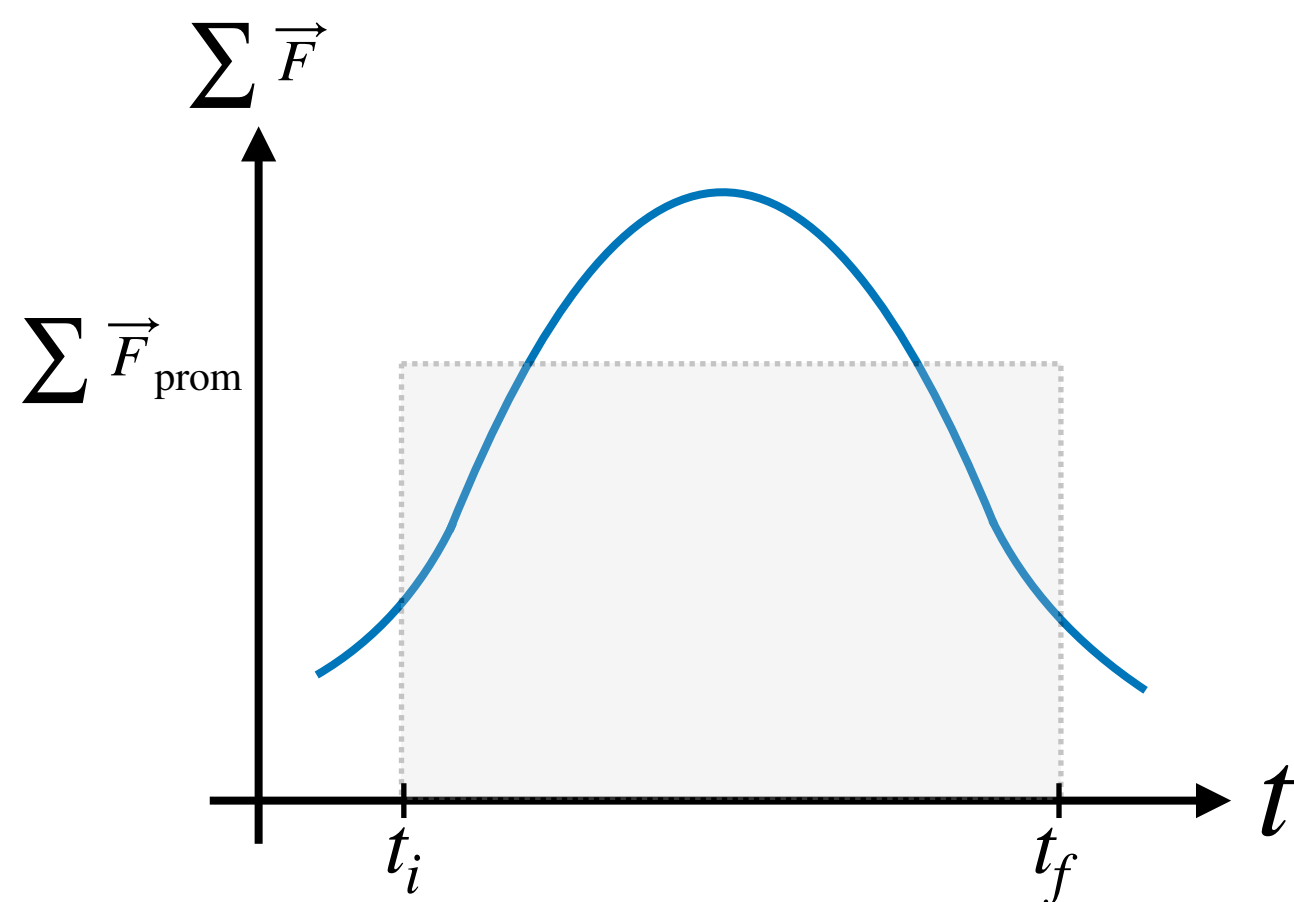


$$\begin{aligned} \sum \vec{F} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0 &\implies \frac{d}{dt} (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = 0 \\ &\implies \frac{d}{dt} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0 \\ &\implies \frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt} = 0 \implies \Delta\vec{p}_{\text{tot}} = 0 \end{aligned}$$

El momentum lineal del sistema se conserva

Impulso

Al escribir la segunda Ley de Newton en términos del momentum lineal $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, notamos que $d\vec{p} = \sum \vec{F} dt$. Si pensamos a la fuerza como una función del tiempo, la podemos representar gráficamente por ejemplo como



Al integrar esta última expresión se obtiene En donde hemos definido el Impulso $\vec{I}$ como

$$\int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{F} dt$$

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{F} dt$$

$$\Delta \vec{p} = \vec{I}$$

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{F} dt$$

El Impulso es una medida del grado de como una fuerza externa cambia el momentum de un sistema

No siempre se puede conocer la fuerza externa en todo instante de tiempo, por lo que resulta útil definir una fuerza promedio $\sum \vec{F}_{prom}$ a partir del teorema del valor medio

$$\sum \vec{F}_{prom} = \frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{F} dt = \frac{1}{\Delta t} \vec{I}$$

$$\vec{I} = \sum \vec{F}_{prom} \Delta t$$

De aquí podemos entender el impulso como el tiempo en el cuál actúa una fuerza constante en un sistema

Teorema Impulso-Momentum

El cambio en el momentum de un sistema es igual al impulso que la fuerza neta ejerce sobre el sistema

$$\Delta \vec{p} = \vec{I}$$



FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Física I - FIS1510

Mecánica de Fluidos

Profesor: Rafael Bravo

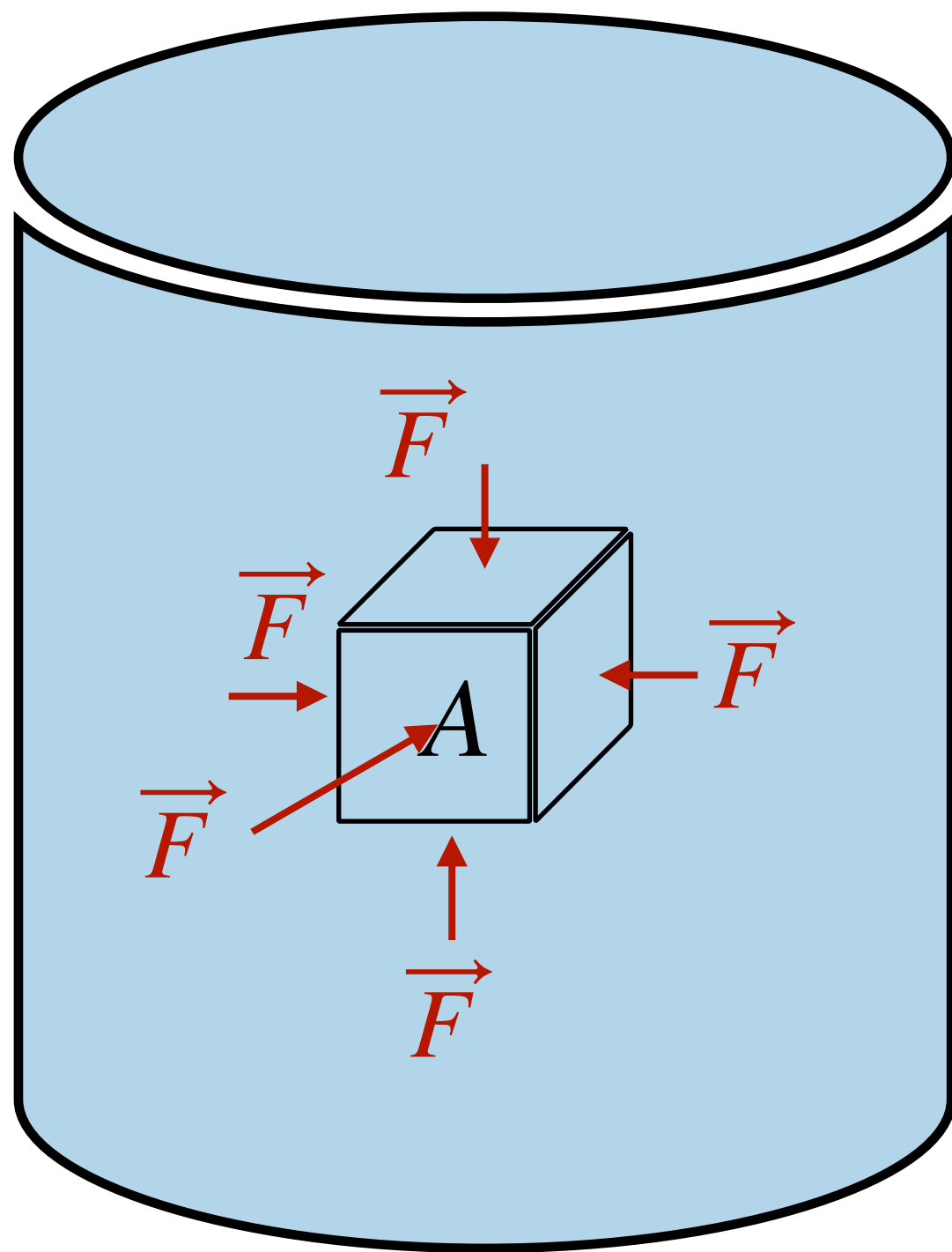
rafael.bravo@uc.cl

Presión y densidad

Fluido

- Sistema de partículas deformable (distancias internas entre las partículas que lo constituyen puede cambiar)
- No son capaces de resistir fuerzas de corte o de arrastre
- Adoptan la forma del recipiente que los contiene

Cuando un objeto se sumerge en un fluido estático, este último tiende a comprimir al objeto desde todos sus lados



Si $F = |\vec{F}|$ es la magnitud de la fuerza ejercida por el fluido sobre el cuerpo y A es el área de una de sus caras, a la razón entre estas cantidades se la llama **Presión**

$$P = \frac{F}{A}$$

En el Sistema Internacional (SI) la Presión se mide en Pascales (Pa), $1Pa = 1N/m^2$

Mientras más masa de fluido haya sobre el objeto, mayor será la presión. La masa del fluido aumenta con la profundidad. Por lo tanto existe una relación entre la presión y la profundidad

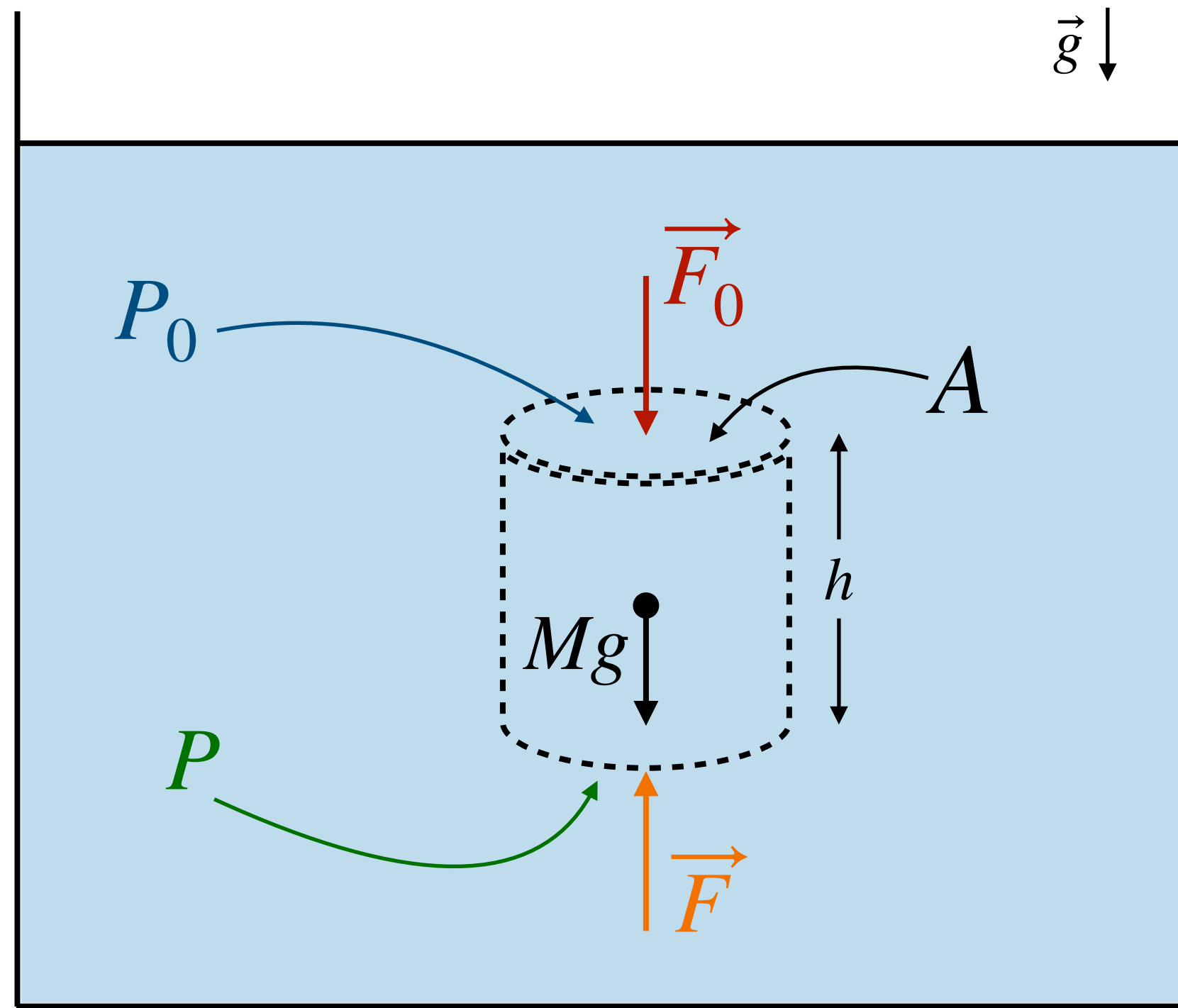
Una propiedad y cantidad importante de cualquier material, en especial los fluidos, es su densidad (volumétrica) ρ . En el SI se mide en kg/m^3

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Si la densidad es constante y uniforme en todo el fluido, se dirá que el **fluido es incompresible**

Variación de la presión con la profundidad

Consideremos la siguiente situación



- Un cilindro imaginario de altura h y sección transversal A se encuentra sumergido a cierta profundidad en un fluido
- El fluido ejerce presión sobre todos los puntos de este cilindro. P_0 en la cara superior y P en su cara inferior.
- Las respectivas fuerzas son $F = PA$ y $F_0 = P_0A$. Si tomamos en consideración que el cilindro contiene una sección de fluido con masa M , entonces también podemos identificar la fuerza de peso asociada a esta masa $F_g = Mg$.
- Si el fluido es incompresible $\Rightarrow \rho = \text{const.} = M/V \Rightarrow M = \rho V$, en donde $V = Ah$.
- Si el fluido es estático, entonces el sistema está en equilibrio $\Rightarrow \sum \vec{F} = 0$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= PA - P_0A - Mg = 0 \\ \Rightarrow PA - P_0A - \rho ghA &= 0\end{aligned}$$

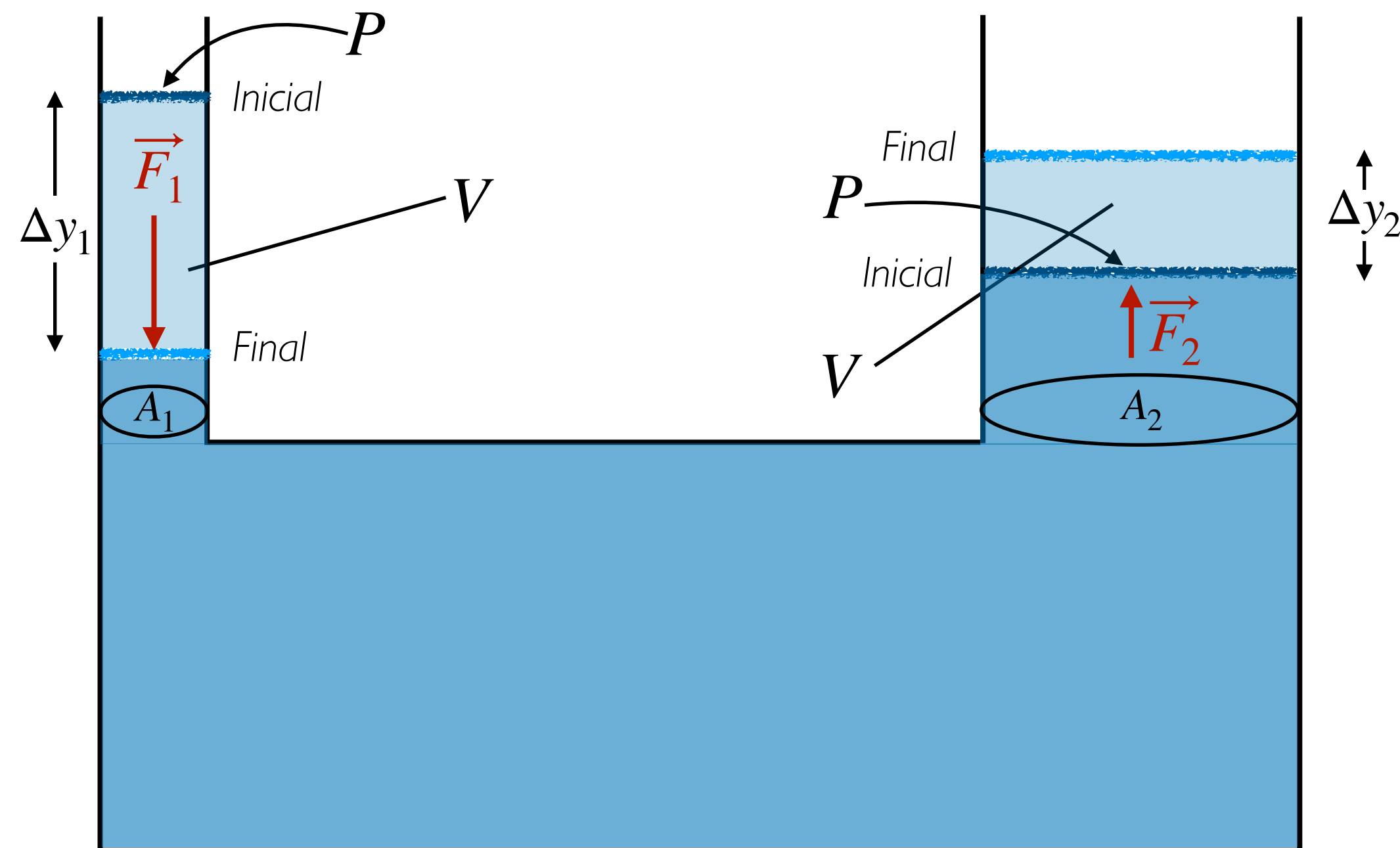
$$P = P_0 + \rho gh$$

La presión P a una profundidad h bajo la superficie del fluido, en donde la presión es P_0 , es mayor en una cantidad ρgh . La presión es la misma en todos los puntos que se encuentren a la misma profundidad. P_0 suele ser la **Presión Atmosférica**.
 $P_0 = 1\text{atm} \approx 1.013 \times 10^5 \text{Pa}$

Cualquier aumento en la presión en la superficie del fluido debe transmitirse a todo otro punto en el fluido, incluidas las paredes del recipiente que lo contiene. Esto se conoce como el **Principio de Pascal**

Aplicación del Principio de Pascal

Cualquier cambio en la presión aplicada a un fluido se transmite sin disminución a todos los puntos del fluido y por lo tanto a la superficie del contenedor



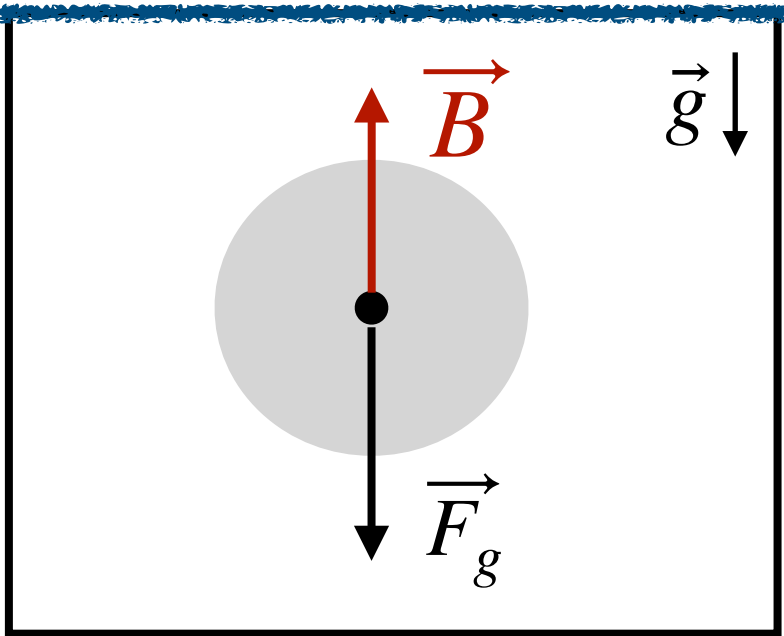
- La presión debe ser la misma en ambos lados $P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$
- La masa de fluido desplazado en ambos lados también debe ser la misma, si el fluido es ideal, entonces el volumen V de fluido desplazado es el mismo

$$V = A_1 \Delta y_1 = A_2 \Delta y_2 \implies \frac{A_1}{A_2} = \frac{\Delta y_2}{\Delta y_1}$$

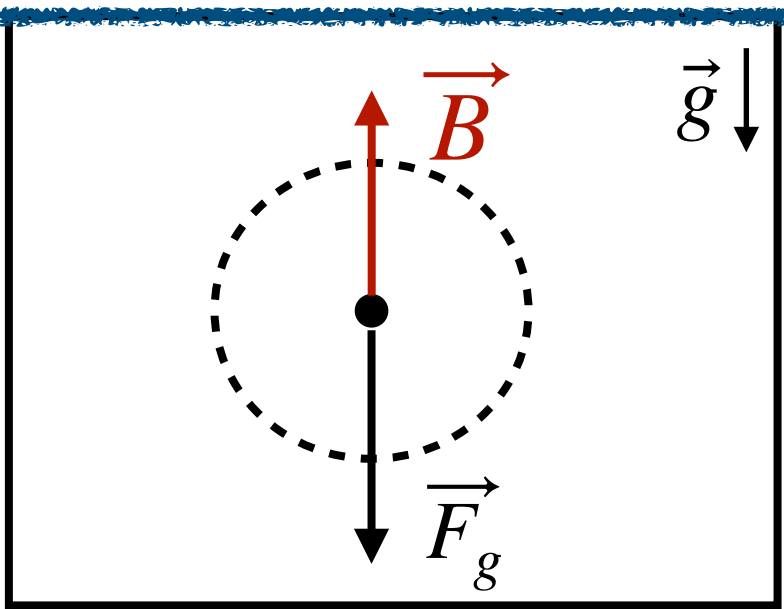
$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\Delta y_2}{\Delta y_1} \implies F_1 \Delta y_1 = F_2 \Delta y_2 \quad \text{Trabajo Mecánico}$$

El trabajo mecánico realizado por la fuerza F_1 sobre el pistón de entrada, es igual al trabajo realizado por la fuerza F_2 sobre el pistón de salida. Esto es una consecuencia de la conservación de la energía

Empuje



Cuando un objeto se sumerge en un fluido, la fuerza $\vec{B}$ que el fluido ejerce sobre el objeto sumergido se le llama **fuerza de empuje**, de flotación o boyante. La existencia de esta fuerza explica por qué flotan los barcos



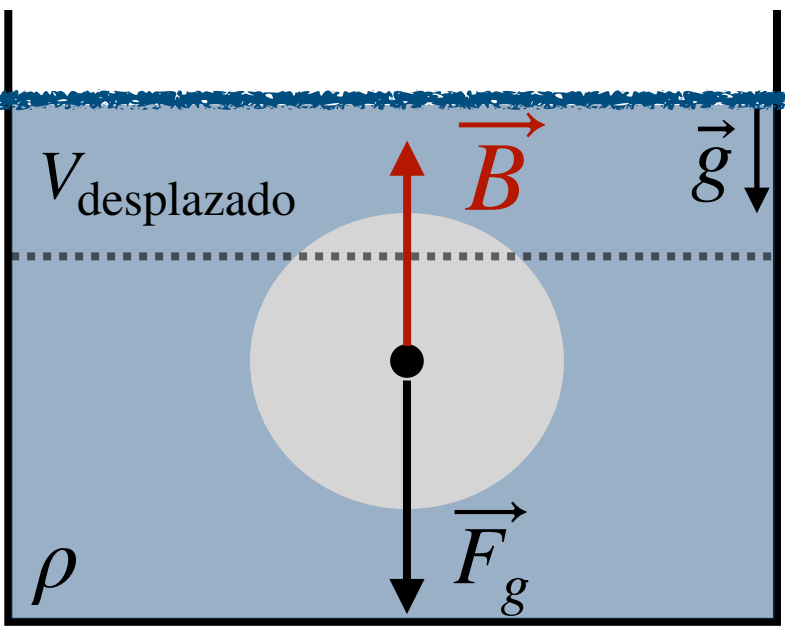
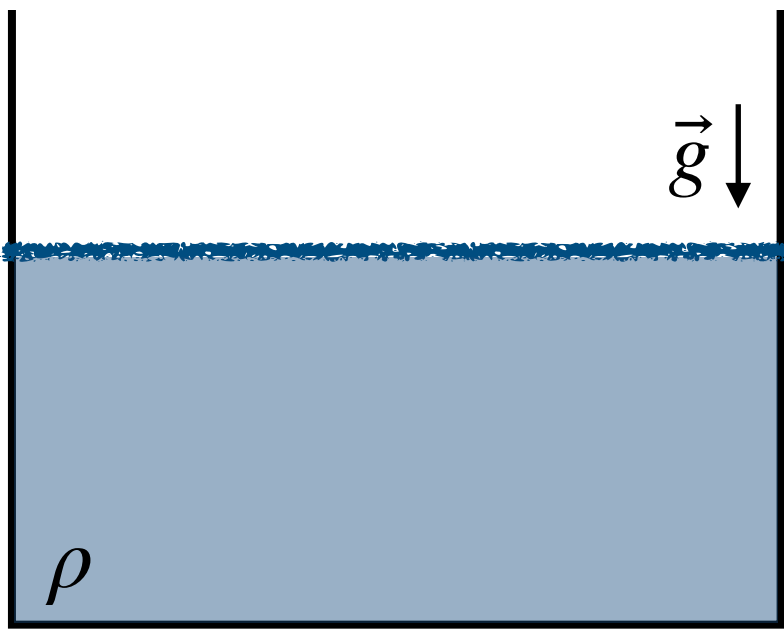
Consideremos un volumen de prueba (imaginario)

En equilibrio $\implies \vec{B} + \vec{F}_g = 0$

Si ponemos un cuerpo del mismo volumen, la fuerza debe ser la misma

Principio de Arquímedes

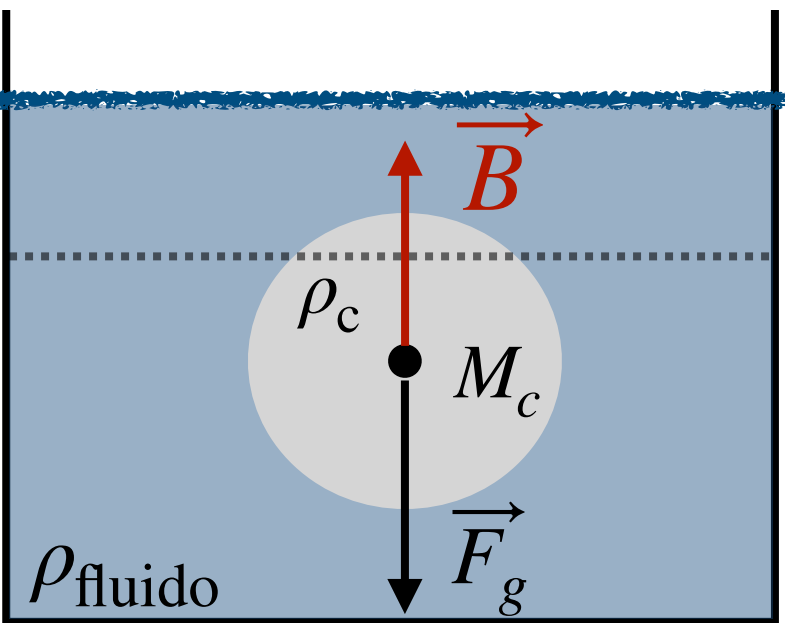
La fuerza de empuje sobre un cuerpo, es siempre igual al peso del fluido desplazado por el cuerpo



$$\vec{B} = \rho g V_{\text{desplazado}}$$

Cuerpo totalmente sumergido

$$V_{\text{desplazado}} = V_{\text{cuerpo}}$$

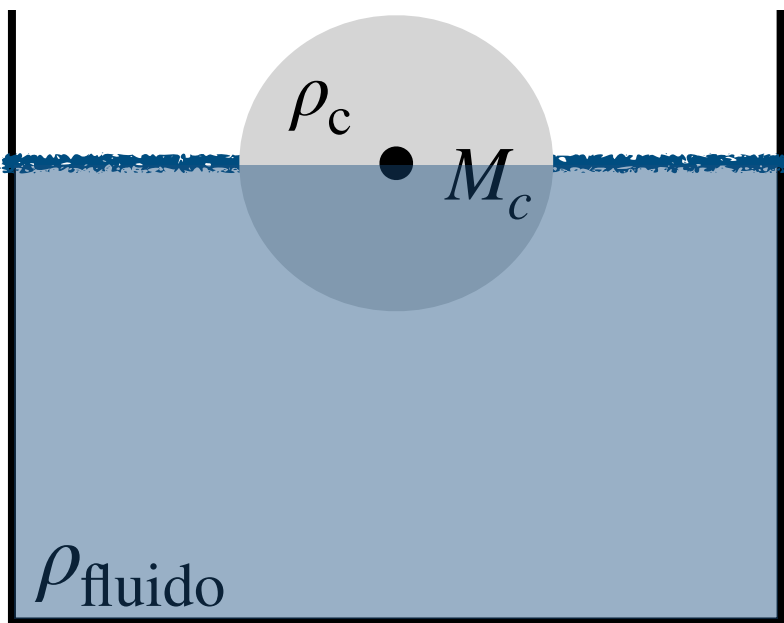


La fuerza neta sobre el cuerpo es $\sum F = B - F_g = M_c a$

- $\rho_{\text{fluido}} > \rho_c \implies B > F_g$: El cuerpo acelera hacia arriba
- $\rho_{\text{fluido}} < \rho_c \implies B < F_g$: El cuerpo acelera hacia abajo
- $\rho_{\text{fluido}} = \rho_c \implies B = F_g$: El cuerpo permanece en equilibrio

Cuerpo parcialmente sumergido

$$V_{\text{desplazado}} \neq V_{\text{cuerpo}}$$



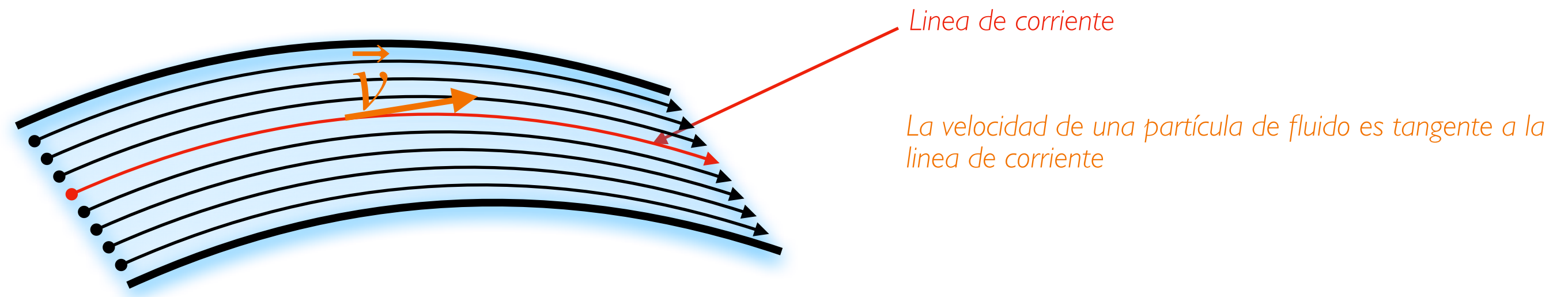
El cuerpo se encuentra en equilibrio $B = F_g$ pero como flota $\rho_c < \rho_{\text{fluido}}$

$$\frac{V_{\text{desplazado}}}{V_{\text{cuerpo}}} = \frac{\rho_c}{\rho_{\text{fluido}}}$$

Fluidos en movimiento

Una descripción realista es un fenómeno de alta complejidad. Consideraremos el movimiento de **fluidos ideales**

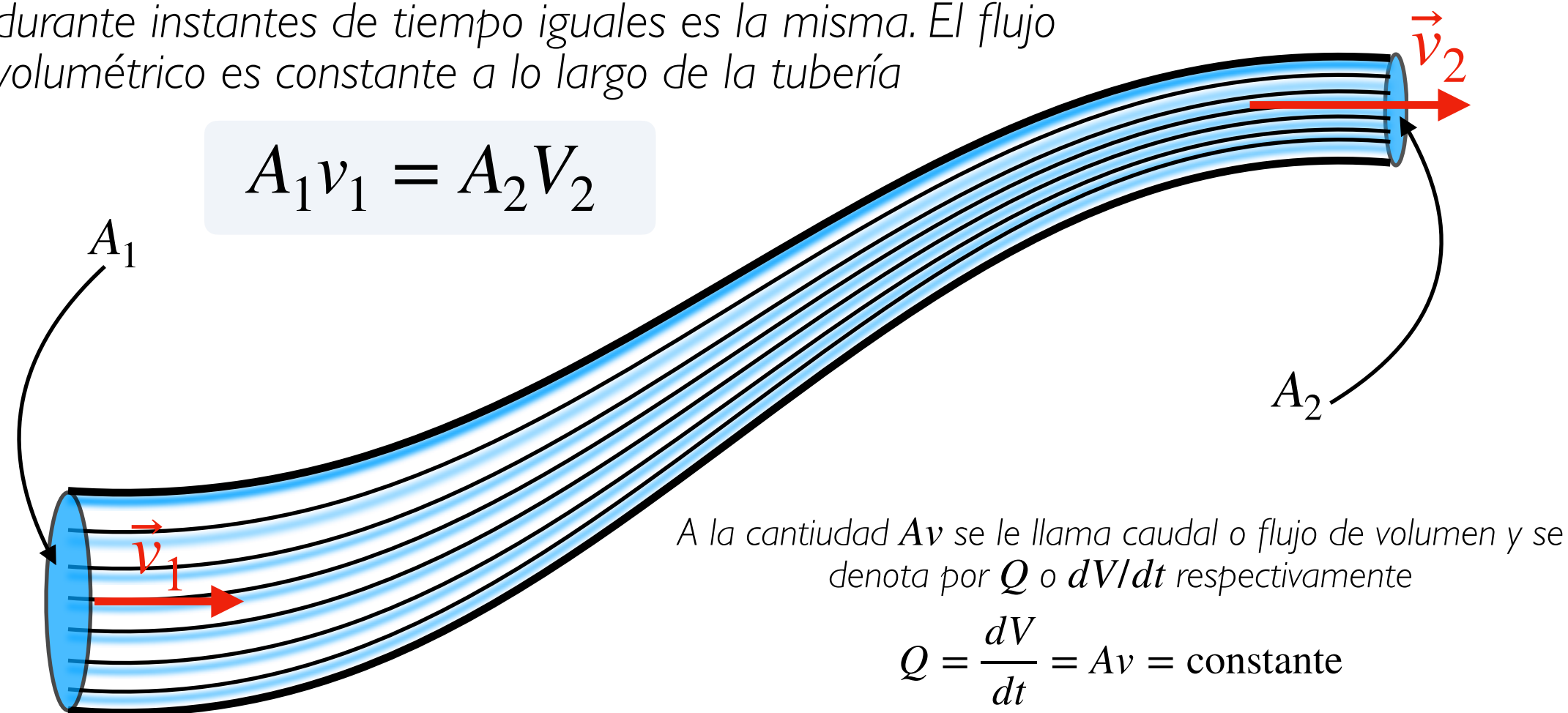
- ▶ Incompresible (su densidad no cambia)
- ▶ No viscoso (no tiene fricción interna)
- ▶ Irrotacional (no tiene momento angular)
- ▶ El flujo es laminar: las líneas de corriente nunca se cruzan



Ecuación de continuidad

El fluido al ser incompresible, la masa de fluido desplazada durante instantes de tiempo iguales es la misma. El flujo volumétrico es constante a lo largo de la tubería

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$



A la cantidad Av se le llama caudal o flujo de volumen y se denota por Q o dV/dt respectivamente

$$Q = \frac{dV}{dt} = Av = \text{constante}$$

Si el fluido fuese compresible y su densidad cambiara entre A_1 y A_2 como ρ_1 y ρ_2 respectivamente, entonces

$$A_1 \rho_1 v_1 = A_2 \rho_2 v_2 \quad \text{Ecuación de continuidad fluido compresible}$$

Ecuación de Bernoulli

Los cambios en la presión de un fluido en movimiento se deben a cambios en su velocidad como también en su altura

$$P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

