

Apuntes de Electricidad y Magnetismo

FIS1533 – Pontificia Universidad Católica de Chile

Rafael Bravo Guerraty

*Instituto de Física, Pontificia Universidad Católica de Chile,
Avenida Vicuña Mackenna 4860, Santiago, Chile*

rafael.bravo@uc.cl

Contenidos

Descripción general	1
1 Electroestática	2
1.1 Carga eléctrica	2
1.2 Ley de Coulomb	3
1.3 Campo eléctrico	5
1.4 Ley de Gauss	6
1.5 Potencial eléctrico	9
1.6 Trabajo y energía electrostática	12
1.7 Conductores	14
A Herramientas matemáticas	17
A.1 Coordenadas curvilíneas	17
A.2 Integrales vectoriales de línea, superficie y volumen	18
A.3 Delta de Dirac	19
A.4 Identidades vectoriales	20

Descripción general

A grandes rasgos, la pregunta fundamental que la física trata de responder es ¿cómo se comporta un sistema cuando se encuentra sujeto a la presencia de una fuerza? Hasta donde sabemos, en la naturaleza existen solo 4 fuerzas básicas: gravitatoria, electromagnética, nuclear fuerte y nuclear débil. De ellas, la **electromagnética** gobierna esencialmente toda la física y la química de la escala cotidiana: la cohesión de átomos y moléculas, la luz, la electrónica, y la casi totalidad de las fuerzas de contacto que experimentamos (fricción, tensión, normal) son de origen electromagnético.

Sorprendentemente, la descripción completa de la fuerza del electromagnetismo se encuentra contenida en cuatro sencillas y elegantes ecuaciones.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Estas se conocen como las ecuaciones de Maxwell. No hay que entender aún estas ecuaciones. Vale la pena tenerlas a la vista como *destino*. En física, o en cualquier otra disciplina, es raro encontrar un conjunto tan diverso de fenómenos a partir de tan poco. El objetivo de este curso es construir poco a poco las ecuaciones de Maxwell y explorar algunas de las muchas historias que encierran.

1 Electroestática

1.1 Carga eléctrica

Así como la *masa* da origen a la fuerza de gravedad, la materia tiene otra propiedad intrínseca que da origen a las fuerzas electromagnéticas; la **carga eléctrica**.

La evidencia experimental básica, conocida desde la antigüedad (el ámbar frotado, *elektron* en griego, atrae objetos ligeros), se resume en tres hechos:

1. Existen **dos tipos** de carga, que Franklin llamó *positiva* y *negativa*.
2. Cargas del **mismo signo se repelen**; de **signo opuesto se atraen**.
3. La carga neta de un sistema aislado **se conserva**.

La materia ordinaria está hecha de átomos: un núcleo compacto de **protones** (carga $+e$) y **neutrones** (carga nula), rodeado de **electrones** (carga $-e$). La escala atómica es $\sim 10^{-10}$ m; la nuclear, $\sim 10^{-15}$ m. El valor de la **carga elemental** es

$$e = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C},$$

En donde C es la abreviatura para *Coulomb*, la cuál es la unidad de medida de la carga eléctrica en el sistema internacional (SI).

Un dato central y no trivial: la carga del protón y la del electrón son *exactamente* iguales en magnitud (verificado experimentalmente a mejor que 1 parte en 10^{21}). Por eso un átomo neutro tiene carga rigurosamente nula, y la materia a granel es eléctricamente neutra con enorme precisión.

La **carga neta** de un cuerpo es

$$q = e(N_p - N_e),$$

con N_p y N_e el número de protones y electrones. Un cuerpo está *cargado* cuando $N_p \neq N_e$, es decir cuando tiene exceso o defecto de electrones, y *neutro* cuando $N_p = N_e$.

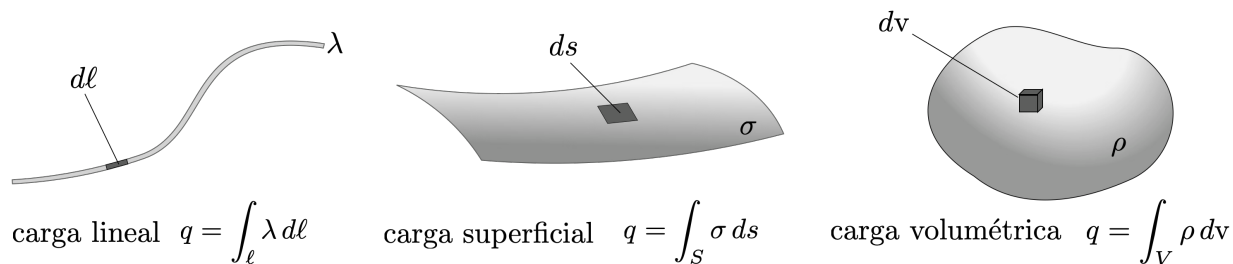
La carga eléctrica está **cuantizada**. Es decir, toda carga observada es un múltiplo entero de e :

$$q = N e, \quad N \in \mathbb{Z}.$$

A un nivel más profundo, existen partículas elementales llamadas *quarks* las cuales tienen cargas fraccionarias ($\pm\frac{1}{3}e$, $\pm\frac{2}{3}e$), pero están *confinadas*: nunca aparecen libres, de modo que la carga libre

observable siempre es entera en unidades de e . La cuantización es real, pero e es tan pequeña que a escala macroscópica la carga se comporta como un continuo. Por eso podremos, tratar distribuciones continuas a partir de sus *densidades de carga*.

$$\lambda = \frac{dq}{d\ell} [\text{C m}^{-1}], \quad \sigma = \frac{dq}{ds} [\text{C m}^{-2}], \quad \rho = \frac{dq}{dv} [\text{C m}^{-3}]$$



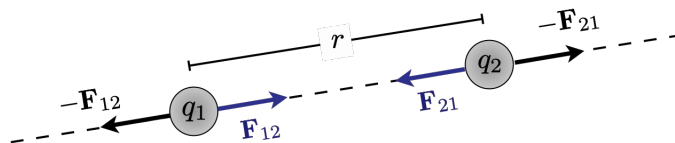
La movilidad de la carga permite clasificar a los materiales como:

- **Conductores** (metales): cargas libres; el exceso se redistribuye casi al instante.
- **Aislantes/dieléctricos** (plásticos, vidrio): cargas ligadas; solo se polarizan localmente.
- **Semiconductores** (Si, Ge): intermedios y controlables (electrónica).
- **Superconductores** (Hg, Al): resistencia nula bajo cierta temperatura crítica T_c .

Electrización: por *fricción*, *contacto* e *inducción*. La inducción explica por qué un cuerpo cargado atrae objetos neutros.

1.2 Ley de Coulomb

Las partículas cargadas sienten fuerzas electromagnéticas. Charles Coulomb (1785) midió con una balanza de torsión que la fuerza $\mathbf{F}$ entre dos cargas puntuales en reposo, y encontró que esta fuerza:



- Es **proporcional** al producto de las cargas, $\propto q_1 q_2$.
- Varía con el **inverso del cuadrado** de la distancia, $\propto 1/r^2$.
- Actúa a lo largo de la **recta** que las une (fuerza central).
- Es **repulsiva** si las cargas tienen igual signo, **atractiva** si es opuesto.

En forma escalar, la magnitud de la fuerza entre dos cargas puntuales separadas una distancia r es

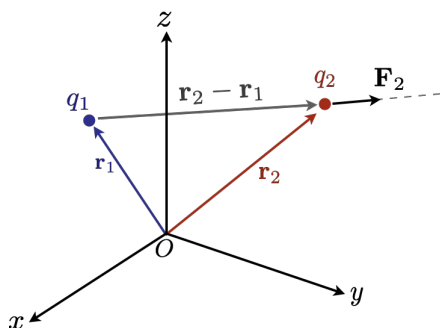
$$|\mathbf{F}| = k_e \frac{|q_1 q_2|}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2};$$

con la constante de Coulomb k_e y la permitividad del vacío ε_0

$$k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 8.99 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}, \quad \varepsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}.$$

Ley de Coulomb – Forma vectorial

La versión escalar no dice *hacia dónde* apunta la fuerza. Sea q_1 la carga fuente en $\mathbf{r}_1$ y q_2 la carga sobre la que evaluamos la fuerza, en $\mathbf{r}_2$. Definimos el vector de separación $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, que apunta **de la fuente al punto de interés**. La fuerza sobre q_2 es

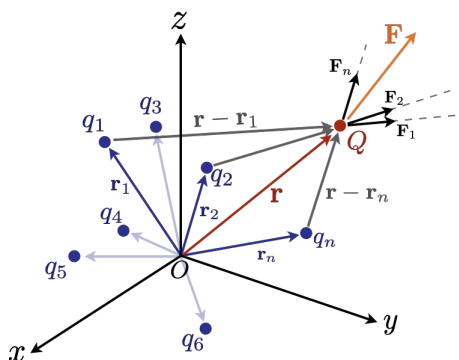


$$\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

El vector unitario $\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$ apunta *desde la fuente q_1 hacia q_2* . Con esta convención el **signo sale solo**: si $q_1 q_2 > 0$ (igual signo) la fuerza va en el sentido del vector unitario, alejándose de la fuente (repulsión); si $q_1 q_2 < 0$, apunta al revés (atracción). No hay que “poner el signo a mano”.

Principio de superposición

La fuerza de Coulomb es **lineal** en las cargas fuente. En presencia de varias cargas $q_1, q_2, \dots, q_n$, la fuerza total sobre Q es la *suma vectorial* de las fuerzas que ejercería cada una por separado.



q_i : carga fuente
 Q : carga de prueba

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(q_1 Q \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} + q_2 Q \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} + \dots + q_n Q \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^3} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \\ &= Q \mathbf{E}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

La superposición es la observación experimental de que las interacciones se suman sin “interferir” (la presencia de q_2 no altera la fuerza que q_1 ejerce sobre Q). Esta linealidad es la que hace tratable todo el electromagnetismo.

1.3 Campo eléctrico

La fuerza de Coulomb es *a distancia*: q_2 actúa sobre q_1 sin nada entre medio. Es conveniente pensar en dos pasos: la carga fuente crea en todo el espacio un **campo**; una carga puesta en un punto siente la fuerza del campo *ahí* (acción local). Esta idea —al principio un mero cambio de énfasis— resultará esencial: los campos tienen energía, momento, y pueden propagarse como ondas aun sin cargas presentes.

El **campo eléctrico** en un punto es la fuerza por unidad de carga que sentiría una carga de prueba Q positiva colocada allí, en el límite en que Q no perturba las fuentes:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \equiv \lim_{Q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{Q}.$$

sus unidades son $[\mathbf{E}] = \text{N C}^{-1}$. El límite $Q \rightarrow 0$ es conceptual: si Q fuese grande, movería a las cargas fuente (sobre todo en conductores) y mediría un campo distinto del que queríamos caracterizar. El campo es una propiedad de las *fuentes* y del punto, no de la carga de prueba. Dividiendo la ley de Coulomb por Q , el campo de una **carga puntual** q ubicada en el origen es

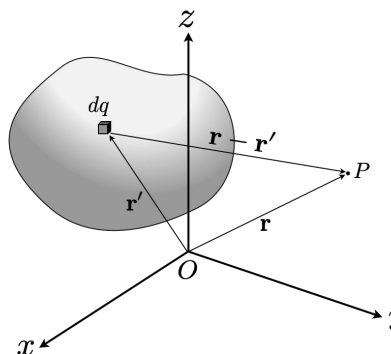
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

con $r = |\mathbf{r}|$ y $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$. Apunta radialmente hacia afuera si $q > 0$, hacia adentro si $q < 0$. Por superposición, el campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ de una distribución de n cargas discretas q_i en posiciones $\mathbf{r}_i$ es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}.$$

Distribución continua de cargas

A escala macroscópica la carga se comporta como un continuo. Un elemento de carga dq actúa como una carga puntual; sumando (integrando) sobre la distribución se tiene



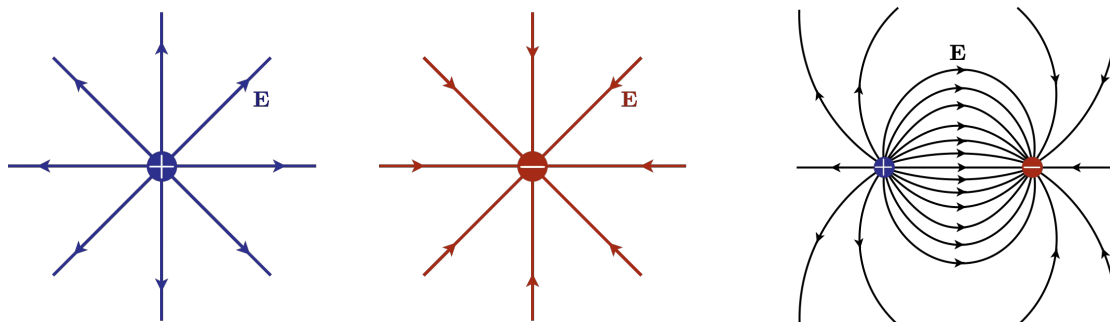
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dq$$

$$dq = \begin{cases} \lambda(\mathbf{r}') d\ell' & (\text{línea}) \\ \sigma(\mathbf{r}') ds' & (\text{superficie}) \\ \rho(\mathbf{r}') dv' & (\text{volumen}) \end{cases}$$

Donde $\mathbf{r}'$ recorre la distribución (la “variable de integración”) y $\mathbf{r}$ es el punto de campo, *fijo* durante la integral. Notar que es una integral **vectorial**: en rigor son tres integrales, una por componente. En la práctica se resuelve explotando la **simetría** para anular componentes antes de integrar.

1.4 Ley de Gauss

Si bien es posible calcular el campo eléctrico de distribuciones integrando la ley de Coulomb, existe una manera de obtener $\mathbf{E}$ casi sin integrar cuando hay simetría en el problema. En principio, el campo eléctrico al ser un campo vectorial, es difícil de representar: a cada punto del espacio le corresponde un vector. Sin embargo, Faraday introdujo una representación más legible, las **líneas de campo**, curvas cuya tangente en cada punto da la dirección de $\mathbf{E}$.

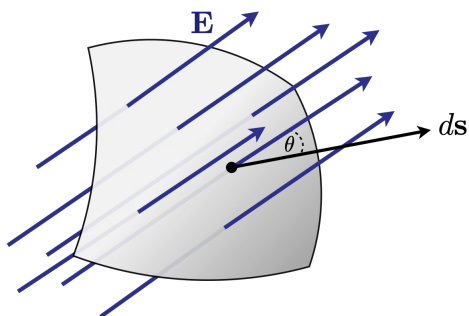


Para representar las líneas de campo, hay que tener en cuenta lo siguiente:

1. Nacen en las cargas positivas (+) y mueren en las negativas (−) (o en el infinito).
2. Su **densidad** (líneas por unidad de área transversal) es proporcional a la **magnitud** de $\mathbf{E}$.
3. Nunca se cruzan: en un cruce el campo tendría dos direcciones.

El hecho de que “densidad $\propto$ magnitud” no es arbitrario: contiene la ley del inverso del cuadrado. Si N líneas salen de una carga puntual, al atravesar una esfera de radio r se reparten sobre un área $4\pi r^2$, de modo que su densidad es $N/(4\pi r^2) \propto 1/r^2$ —justo la dependencia del campo eléctrico.

Para hacer cuantitativo el “número de líneas que atraviesan una superficie” definimos el **flujo eléctrico** Φ_E . A cada trozo de superficie le asociamos un vector de área $d\mathbf{s}$: magnitud igual al área del trozo y dirección **normal** a él. El **flujo eléctrico** de $\mathbf{E}$ a través de una superficie S es

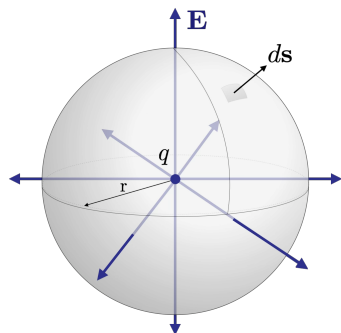


$$\Phi_E = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

Para un campo uniforme y una superficie plana de área A , $\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{s} = EA \cos \theta$, con θ el ángulo entre $\mathbf{E}$ y la normal. El producto punto captura la intuición: solo la componente de $\mathbf{E}$ *perpendicular*

a la superficie “la atraviesa”. Si $\mathbf{E}$ es paralelo a la superficie ($\theta = 90^\circ$), el flujo es nulo. Para una superficie **cerrada** se adopta por convención la normal **saliente**. El flujo neto $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ mide entonces cuántas líneas salen menos cuántas entran.

Calculemos el flujo del campo de una carga puntual q (en el origen) a través de una esfera de radio r centrada en ella.



$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad d\mathbf{s} = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \hat{\mathbf{r}}$$

$\mathbf{E} \parallel d\mathbf{s}$. $\mathbf{E}$ es constante en magnitud sobre la esfera

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \oint ds = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

El resultado **no depende de r** : los factores r^2 se cancelan, exactamente porque el campo cae como $1/r^2$ y el área crece como r^2 .

El resultado vale para *cualquier* superficie cerrada que encierre la carga, no solo una esfera. La forma limpia de verlo es con el **ángulo sólido**. El flujo por un elemento $d\mathbf{s}$ es

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega,$$

donde $d\Omega = (\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s})/r^2$ es el ángulo sólido que el elemento subtiende desde la carga. Al integrar sobre una superficie cerrada que *encierra* la carga, $\oint d\Omega = 4\pi$; si la carga queda *fuera*, cada cono de ángulo sólido atraviesa la superficie un número par de veces con signos opuestos y $\oint d\Omega = 0$. Por tanto

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \begin{cases} q/\epsilon_0 & \text{si la carga está dentro,} \\ 0 & \text{si está fuera.} \end{cases}$$

Por superposición, para una distribución arbitraria solo cuenta la carga *encerrada*:

Ley de Gauss (forma integral).

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0},$$

donde Q_{enc} es la carga total contenida dentro de la superficie cerrada S (“superficie gaussiana”). Las cargas exteriores contribuyen a $\mathbf{E}$ en cada punto, pero su flujo neto a través de S es cero.

La ley de Gauss no contiene física nueva: es equivalente a la ley de Coulomb más superposición. Su valor es doble: (i) reempaqueta la información en una forma que, con simetría, entrega $\mathbf{E}$ sin integrar;

(ii) se generaliza —a diferencia de Coulomb— a cargas en movimiento, y sobrevive intacta en las ecuaciones de Maxwell.

La forma integral relaciona el flujo con la carga encerrada. Podemos convertirla en una afirmación **local**, punto a punto. El teorema de la divergencia transforma el flujo en una integral de volumen,

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dv,$$

y la carga encerrada es $Q_{\text{enc}} = \int_V \rho dV$. Igualando,

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dv = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dv.$$

Como esto vale para *cualquier* volumen V , los integrandos deben coincidir en cada punto:

Ley de Gauss (forma diferencial) — 1.^a ecuación de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

La divergencia de $\mathbf{E}$ en un punto mide la densidad de carga *ahí*. Las cargas positivas son “fuentes” de líneas de campo ($\nabla \cdot \mathbf{E} > 0$); las negativas ($\nabla \cdot \mathbf{E} < 0$), “sumideros”.

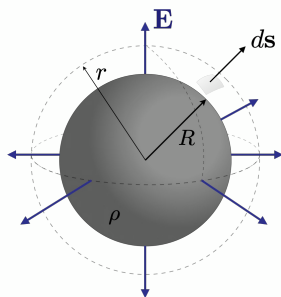
Esta es la primera de las cuatro ecuaciones que anunciamos al principio. Las formas integral y diferencial son equivalentes (el puente es el teorema de la divergencia); usaremos la que convenga en cada problema.

La ley de Gauss vale *siempre*, pero solo permite **despejar $\mathbf{E}$** cuando la simetría del problema garantiza que $\mathbf{E}$ tiene magnitud constante y dirección fija (paralela o perpendicular a $d\mathbf{s}$) sobre una superficie gaussiana bien elegida.

Ejemplo: Simetría esférica – esfera con carga uniforme

Una esfera de radio R con densidad uniforme ρ y carga total $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$. Por simetría $\mathbf{E} = E(r) \hat{\mathbf{r}}$. Usamos una gaussiana esférica de radio r , donde $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E(r) 4\pi r^2$.

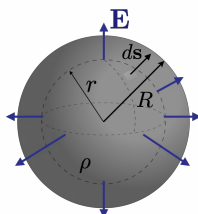
Fuera ($r > R$): $Q_{\text{enc}} = Q$.



$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

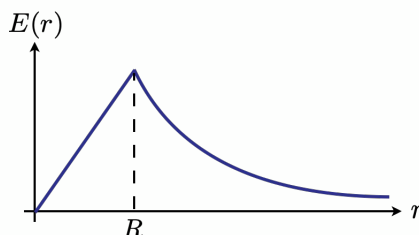
Desde afuera, la esfera se comporta *exactamente* como una carga puntual en su centro.

Dentro ($r < R$): solo cuenta la carga hasta r , $Q_{\text{enc}} = Q r^3/R^3$.



$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q r}{R^3} \hat{\mathbf{r}}.$$

El campo crece *linealmente* desde cero en el centro hasta su máximo en la superficie, y luego decae como $1/r^2$.

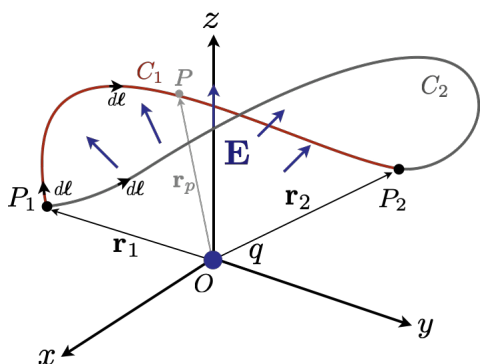


1.5 Potencial eléctrico

Anteriormente fijamos la divergencia de $\mathbf{E}$ (ley de Gauss). Un campo vectorial, sin embargo, no queda determinado solo por su divergencia: hace falta también su **rotor**. Si calculamos $\nabla \times \mathbf{E}$ para la electrostática, descubrimos que se anula, y de ese hecho —que $\mathbf{E}$ es *conservativo*— nace una herramienta central: el **potencial eléctrico**, un campo escalar del que $\mathbf{E}$ se recupera derivando.

Rotor del campo eléctrico

Calculemos la integral de línea del campo de una carga puntual q (en el origen), desde un punto P_1 en $\mathbf{r}_1$ hasta un punto P_2 en $\mathbf{r}_2$.



$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad d\ell = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin \theta d\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}.$$

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\ell = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

El resultado depende **solo de los extremos** r_1, r_2 , no del camino. Para una trayectoria **cerrada**, $r_1 = r_2$ y la integral se anula. Por superposición esto vale para el campo de cualquier distribución estática:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\ell = 0.$$

Aplicando el teorema de Stokes, $\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = 0$ para toda superficie, de modo que el integrando debe anularse punto a punto:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0.$$

El campo electrostático es **irrotacional** (o **conservativo**): su integral de línea entre dos puntos no depende del camino. Esto vale para campos *estáticos*. Cuando haya campos magnéticos variables en el tiempo, $\nabla \times \mathbf{E}$ dejará de ser cero (ley de Faraday) y el campo ya no será conservativo. Por ahora, en electrostática, la propiedad es exacta. Junto con la ley de Gauss, tenemos ya las dos ecuaciones que definen la electrostática:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

Potencial eléctrico

Que $\mathbf{E}$ sea conservativo tiene una consecuencia poderosa: podemos definir una función **escalar** cuyo valor en cada punto codifica todo el campo. Fijado un punto de referencia arbitrario P en $\mathbf{r}_p$, definimos el **potencial eléctrico** como

$$\phi(\mathbf{r}) \equiv - \int_{\mathbf{r}_p}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}.$$

Como $\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0$, la integral no depende del camino, y ϕ está bien definido. Su unidad es el **volt**: $V = J C^{-1} = N m C^{-1}$.

La diferencia de potencial entre dos puntos es independiente de la referencia:

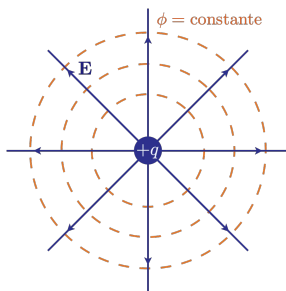
$$\phi(\mathbf{r}_2) - \phi(\mathbf{r}_1) = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}.$$

Solo las **diferencias** de potencial son físicas; el punto de referencia P se escoge de manera que $\phi(\mathbf{r}_p) = 0$. Para distribuciones localizadas se toma $\mathbf{r}_p$ en el infinito, de modo que $\phi(\mathbf{r} \rightarrow \infty) = 0$.

El potencial no solo resume a $\mathbf{E}$: lo determina. Por el teorema fundamental del gradiente, $\phi(\mathbf{r}_2) - \phi(\mathbf{r}_1) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (\nabla \phi) \cdot d\boldsymbol{\ell}$. Comparando con la definición de ϕ , que da $\phi(\mathbf{r}_2) - \phi(\mathbf{r}_1) = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$, e igualando para todo camino:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r})$$

El campo apunta en la dirección de **máxima disminución** del potencial, y es perpendicular a las superficies equipotenciales ($\phi = \text{cte}$).



Esta es la gran ventaja del potencial: es un **escalar**, mientras que **E** es un vector. Casi siempre es más fácil calcular ϕ (una sola integral, sin componentes) y luego obtener **E** derivando, que calcular **E** directamente. Además, la superposición de potenciales es una suma *escalar*.

Potencial de cargas puntuales y distribuciones

Para una carga puntual q en el origen, tomando la referencia en el infinito:

$$\phi(r) = - \int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^2} dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

Por superposición, para un conjunto discreto de cargas q_i y para una distribución continua, se tiene:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}, \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Comparar con la integral para **E**: aquí el integrando es **escalar** y no lleva el factor direccional $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Es, en general, mucho más sencilla. El truco “calcular ϕ y luego derivar” entrega **E** solo si se conoce ϕ en un *entorno* del punto (para poder tomar el gradiente), no en un único punto.

Ejemplo: Esfera con carga uniforme

El campo eléctrico de una esfera de radio R y carga $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, & r \geq R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \hat{\mathbf{r}}, & r \leq R. \end{cases}$$

Obtengamos el potencial electrostático a partir de $\phi(\mathbf{r}) = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\ell$.

Fuera ($r > R$):

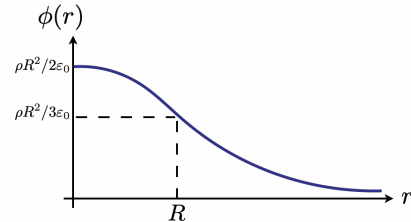
$$\phi(r > R) = - \int_{\infty}^r E(r') dr' = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr'}{r'^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Dentro ($r < R$):

$$\begin{aligned} \phi(r < R) &= - \int_{\infty}^r E(r') dr' = - \int_{\infty}^R E(r') dr' - \int_R^r E(r') dr' \\ &= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{dr'}{r'^2} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_R^r r' dr' \\ &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (3R^2 - r^2) \end{aligned}$$

En términos de la densidad de carga se puede expresar como

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}, & r \geq R \\ \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2), & r \leq R. \end{cases}$$



La ecuación de Poisson

Combinando las dos ecuaciones de la electrostática con $\mathbf{E} = -\nabla\phi$:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \implies \nabla \cdot (-\nabla\phi) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \implies \nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Esta es la **ecuación de Poisson**. En regiones sin carga ($\rho = 0$) se reduce a la **ecuación de Laplace**, $\nabla^2\phi = 0$. Poisson reempaqueta toda la electrostática en una única ecuación para un único campo escalar. El problema típico —dadas las cargas y ciertas condiciones de borde, hallar ϕ — es un problema de ecuaciones diferenciales, y su estudio (métodos de imágenes, separación de variables) es el núcleo técnico de la electrostática avanzada. En este curso lo usaremos sobre todo como marco conceptual.

Teorema de unicidad: *La solución de la ecuación de Poisson en un volumen V con frontera S queda determinada únicamente si se especifica ϕ en S .*

1.6 Trabajo y energía electrostática

Con el potencial ya en mano, podemos hablar de **energía**: cuánto trabajo cuesta armar una configuración de cargas, y dónde queda almacenada esa energía. Al final llegaremos a un resultado notable: la energía reside en el *campo*.

Trabajo para mover una carga

Mover una carga de prueba Q desde $\mathbf{a}$ hasta $\mathbf{b}$ en un campo $\mathbf{E}$ requiere, si lo hacemos cuasiestáticamente (sin darle energía cinética), ejercer una fuerza externa $\mathbf{F}_{\text{ext}} = -q\mathbf{E}$ que compense la eléctrica. El trabajo que hace la fuerza externa es

$$W_{\text{ext}} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} q\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = q[\phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})].$$

Como $\mathbf{E}$ es conservativo, W no depende del camino. En particular, traer la carga desde el infinito ($\phi(\infty) = 0$) hasta un punto $\mathbf{r}$ cuesta

$$W_{\text{ext}} = q\phi(\mathbf{r})$$

Esto le da su significado físico al potencial: $\phi(\mathbf{r})$ es la energía por unidad de carga necesaria para traer una carga hasta $\mathbf{r}$.

Por otra parte, el mismo campo eléctrico ejerce trabajo sobre una carga, en ese caso el trabajo realizado por el campo eléctrico para traer una carga desde ∞ a $\mathbf{r}$ es

$$W_{\text{elec}} = -W_{\text{ext}}.$$

Por otra parte, como sabemos que $\mathbf{E}$ es conservativo, entonces se tiene del *teorema trabajo-energía*

$$W_{\text{elec}} = -\Delta U = U(\infty) - U(\mathbf{r}).$$

En donde $U(\mathbf{r})$ es la energía potencial asociada al campo eléctrico. Como el campo decae en infinito, se sigue que $U(\infty) = 0$. Por lo tanto la energía potencial electrostática es igual al trabajo efectuado por la fuerza externa

$$U(\mathbf{r}) = q\phi(\mathbf{r}).$$

Si miramos la energía asociada a un electrón en un potencial de 1Volt, este tiene una energía de

$$U = 1,602 \times 10^{-19} \text{J} = 1\text{eV}$$

En donde eV se denomina **electrón volt**, y es otra unidad de medida de la energía.

Energía de una configuración de cargas puntuales

Armemos una configuración trayendo las cargas una a una desde el infinito. La primera, q_1 , no cuesta trabajo (no hay campo aún). La segunda, q_2 , se trae al potencial de q_1 : $W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$. La tercera siente a q_1 y q_2 , y así sucesivamente. Sumando todos los pares (cada uno una vez), se tiene que la energía potencial electrostática de la configuración de cargas es

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j<i} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}.$$

Contando cada par dos veces y dividiendo por dos, esto se reescribe de forma más simétrica:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \phi(\mathbf{r}_i),$$

donde $\phi(\mathbf{r}_i)$ es el potencial en la posición de q_i debido a **todas las demás** cargas (no la propia). El factor $\frac{1}{2}$ corrige el doble conteo de pares.

Energía de una distribución continua de cargas

Para una densidad de carga ρ , la suma pasa a integral con $q_i \rightarrow \rho dv$:

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dv.$$

La fórmula anterior habla de cargas y potencial. Podemos reescribirla *solo* en términos del campo. Usando la ley de Gauss $\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \cdot \mathbf{E}) \phi dv.$$

Integrando por partes con la identidad $\nabla \cdot (\phi \mathbf{E}) = (\nabla \phi) \cdot \mathbf{E} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{E})$ y recordando $\nabla \phi = -\mathbf{E}$:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int \nabla \cdot (\phi \mathbf{E}) dv + \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dv \right] = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\oint_S \phi \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dv \right].$$

Si la integral se extiende a *todo el espacio* $\mathbb{R}^3$, la superficie S se aleja al infinito. Ahí $\phi \sim 1/r$, $E \sim 1/r^2$ y $ds \sim r^2$, de modo que el integrando de superficie cae como $1/r$ y el flujo se anula. Queda:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dv \quad \implies \quad u = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E},$$

con u la **densidad de energía** (energía por unidad de volumen) almacenada en el campo. Aparece una imagen nueva: la energía no está “en las cargas” sino **distribuida en el campo**, en todo punto donde $\mathbf{E} \neq 0$. Es la misma energía U contada de otra manera, pero la reinterpretación será esencial cuando el campo se propague por sí solo —las ondas electromagnéticas transportan justamente esta energía.

Ejemplo: Energía de una esfera uniformemente cargada Una esfera de radio R y carga total Q uniforme. Usando los campos que hallamos con Gauss, $E_{\text{in}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3}$ y $E_{\text{out}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 4\pi \left[\int_0^R \frac{r^2}{R^6} r^2 dr + \int_R^\infty \frac{1}{r^4} r^2 dr \right].$$

Las integrales dan $\frac{1}{5R}$ y $\frac{1}{R}$, cuya suma es $\frac{6}{5R}$. Simplificando:

$$U = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}$$

La energía diverge cuando $R \rightarrow 0$: concentrar carga finita en un punto costaría energía infinita.

La fórmula discreta $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i<j} q_i q_j / r_{ij}$ excluye los términos “ $i = i$ ” (la *autoenergía*) y da un número finito. La fórmula del campo $U = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dv$, en cambio, es siempre positiva e *incluye* la autoenergía, que para una carga puntual diverge (como vimos, $U \rightarrow \infty$ si $R \rightarrow 0$). Ambas son correctas para distribuciones continuas; discrepan en el tratamiento de cargas puntuales idealizadas. Es una tensión conocida de la teoría clásica, sin resolución completa dentro de ella.

Como $U \propto E^2$, para dos configuraciones con campos $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 dv = W_1 + W_2 + \epsilon_0 \int \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 dv.$$

El **término cruzado** no se anula: la energía total no es la suma de las energías. La superposición vale para campos y potenciales (lineales), pero *no* para la energía (cuadrática).

1.7 Conductores

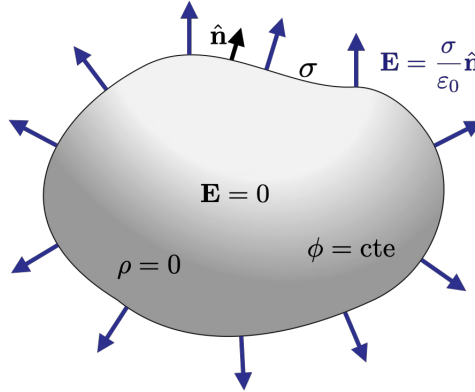
Un conductor es una región del espacio la cual tiene cargas libres que se mueven ante cualquier campo. Esa única propiedad, llevada al **equilibrio electrostático** (cuando ya nada se mueve), fija por completo el comportamiento del conductor y de su entorno. De aquí sale el apantallamiento, la carga inducida y, al final, el condensador.

Propiedades de un conductor en equilibrio

En equilibrio las cargas ya no se mueven, luego la fuerza sobre ellas es nula y por tanto el campo también. De ahí se desprende las siguientes propiedades.

1. **$\mathbf{E} = 0$ en el interior.** Si hubiera campo, las cargas libres se moverían; en equilibrio no lo hacen, luego $\mathbf{E} = 0$ dentro del conductor.
2. **$\rho = 0$ en el interior.** Por la ley de Gauss $\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$: no hay carga neta en el volumen del conductor.
3. **Toda carga neta reside en la superficie.** Es la única posibilidad que deja el punto anterior.
4. **El conductor es un equipotencial.** Como $\mathbf{E} = -\nabla\phi = 0$ dentro, ϕ es constante en todo el conductor (interior y superficie).

5. **$\mathbf{E} \perp$ a la superficie por fuera.** Una componente tangencial pondría en movimiento a las cargas superficiales; en equilibrio no la hay, así que el campo justo afuera es perpendicular a la superficie.



Campo en la superficie

Sea σ la densidad de carga superficial. Tomamos un pequeño paralelepípedo gaussiano que atraviesa la superficie: la tapa exterior (área A) contribuye $E_{\perp}A$; la interior no aporta ($\mathbf{E} = 0$ dentro); las paredes laterales, nada. Con carga encerrada σA :

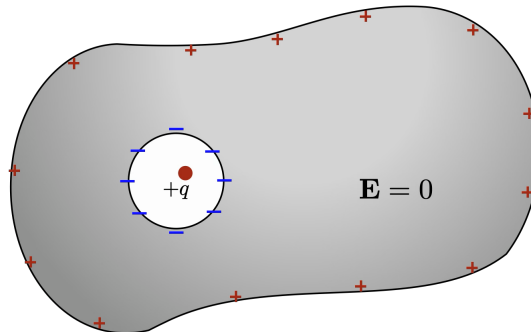
$$E_{\perp}A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \implies \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector normal a la superficie.

Cavidades

Consideremos un conductor con una **cavidad** en su interior.

- **Cavidad vacía.** Si no hay carga dentro de la cavidad, el campo en ella es *exactamente* cero: no hay forma de tener líneas de campo que empiecen y terminen en la pared conductora (equipotencial) sin contradecir $\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0$. La cavidad está **apantallada**.



- **Cavidad con carga q .** Una gaussiana dentro del conductor (donde $\mathbf{E} = 0$) encierra la cavidad, luego

la carga neta encerrada es cero: se induce $-q$ en la pared de la cavidad. Por conservación, aparece $+q$ en la superficie exterior. El campo *fuera* del conductor es el de esa carga $+q$ en la superficie externa, y **no depende** de la posición de q dentro de la cavidad.

Jaula de Faraday. Un conductor aísla su interior de los campos externos: por eso los equipos electrónicos se blindan, y por eso un auto es relativamente seguro ante un rayo. El apantallamiento es *unidireccional* en el sentido de que una carga *dentro* de la cavidad sí produce campo afuera.

Presión electrostática

La carga superficial está en un campo y por tanto siente una fuerza. El campo que actúa sobre un parche de superficie es el de *todas las demás* cargas, no el suyo propio. Como el campo pasa de σ/ϵ_0 (afuera) a 0 (adentro), el campo “de las demás” es el promedio, $\sigma/2\epsilon_0$, dirigido hacia afuera. La fuerza por unidad de área es entonces

$$P = \sigma \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = u$$

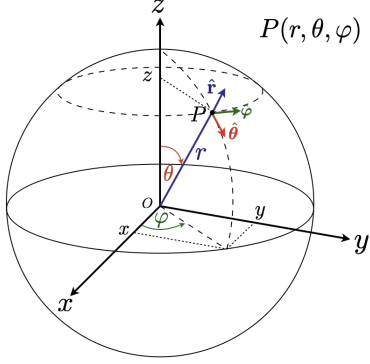
Es una presión **hacia afuera** (una tracción): el campo “tira” de la superficie del conductor, independientemente del signo de σ .

A Herramientas matemáticas

Sean $f(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar y $\mathbf{A}(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función vectorial ambas bien comportadas, diferenciables, continuas, etc.

A.1 Coordenadas curvilineas

Coordenadas esféricas



$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$f(\mathbf{r}) = f(r, \theta, \varphi), \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_r(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{r}} + A_\theta(\mathbf{r}) \hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\varphi(\mathbf{r}) \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

Vectores unitarios

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta \hat{\mathbf{z}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\sin \varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{y}}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \cos \varphi \hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin \varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \sin \varphi \hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos \varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\hat{\mathbf{z}} = \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Elementos diferenciales

Línea: $d\mathbf{r} = d\boldsymbol{\ell} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin \theta d\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}$

$$d^2\mathbf{r} = ds = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (r = \text{cte.})$$

Superficie: $ds = r \sin \theta d\varphi dr \quad (\theta = \text{cte.})$

$$ds = r dr d\theta \quad (\varphi = \text{cte.})$$

Volumen: $d^3\mathbf{r} = dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$

Operadores diferenciales

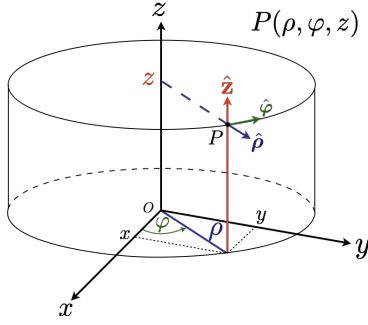
Gradiente: $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}}$

Laplaciano: $\nabla^2 f = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) f + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) f + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$

Divergencia: $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$

Rotor: $\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\varphi}}$

Coordenadas cilíndricas



$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi & y &= \rho \sin \varphi & z &= z \\ 0 \leq \rho < \infty & & 0 \leq \varphi < 2\pi & & -\infty < z < \infty \end{aligned}$$

$$f(\mathbf{r}) = f(\rho, \varphi, z), \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_\rho(\mathbf{r}) \hat{\rho} + A_\varphi(\mathbf{r}) \hat{\varphi} + A_z(\mathbf{r}) \hat{z}$$

Vectores unitarios

$$\hat{\rho} = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}$$

$$\hat{x} = \cos \varphi \hat{\rho} - \sin \varphi \hat{\varphi}$$

$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}$$

$$\hat{y} = \sin \varphi \hat{\rho} + \cos \varphi \hat{\varphi}$$

$$\hat{z} = \hat{z}$$

$$\hat{z} = \hat{z}$$

Elementos diferenciales

Línea: $d\mathbf{r} = d\ell = d\rho \hat{\rho} + \rho d\varphi \hat{\varphi} + dz \hat{z}$

$$d^2\mathbf{r} = ds = \rho d\varphi dz \quad (\rho = \text{cte.})$$

Superficie: $ds = d\rho dz \quad (\varphi = \text{cte.})$

$$ds = \rho d\rho d\varphi \quad (z = \text{cte.})$$

Volumen: $d^3\mathbf{r} = dV = \rho d\rho d\varphi dz$

Operadores diferenciales

Gradiente: $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$

Laplaciano: $\nabla^2 f = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) f + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Divergencia: $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

Rotor: $\nabla \times \mathbf{A} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right] \hat{\rho} + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \hat{\varphi} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right] \hat{z}$

A.2 Integrales vectoriales de línea, superficie y volumen

Teorema fundamental de los gradientes

El cambio total de f en ir de un punto $\mathbf{a}$ a un punto $\mathbf{b}$ a lo largo de un camino $\mathcal{C}$ viene dado por:

$$\int_{\mathcal{C}}^{\mathbf{b}} (\nabla f(\mathbf{r})) \cdot d\ell = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) \quad (\text{A.1})$$

- **Corolario 1:** $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla f(\mathbf{r})) \cdot d\boldsymbol{\ell}$ es independiente del camino que se toma para ir de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$.
- **Corolario 2:** $\oint_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla f(\mathbf{r})) \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0$, ya que los puntos de inicio y término son idénticos.

Teorema de la divergencia

Sea S una superficie en una región de $\mathbb{R}^3$ que encierra un volumen V , entonces se cumple que:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{A.2})$$

Teorema de Stokes

Sea S una superficie en una región de $\mathbb{R}^3$ cuya frontera o borde es una curva cerrada $\mathcal{C}$, se cumple que:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad (\text{A.3})$$

- **Corolario 1:** $\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s}$ depende únicamente del contorno de borde, no de la superficie particular que se use.
- **Corolario 2:** $\oint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = 0$ para cualquier superficie cerrada, ya que el borde se reduce a un punto.

A.3 Delta de Dirac

La delta de Dirac unidimensional $\delta(x)$ se define a partir de:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ \infty, & x = x_0 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Junto con la propiedad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1. \quad (\text{A.5})$$

En particular si $f(x)$ es una función continua ordinaria, el producto $f(x)\delta(x - x_0)$ es cero en todos lados excepto en $x = x_0$, es decir $f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0)\delta(x - x_0)$. De aquí se desprende lo siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0). \quad (\text{A.6})$$

Se puede extender la definición de la delta de Dirac a tres dimensiones como

$$\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0), \quad (\text{A.7})$$

en donde $\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}$. Su integral de volumen en todo el espacio es

$$\int d^3\mathbf{r} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) dx dy dz = 1. \quad (\text{A.8})$$

Análogamente al caso unidimensional se tiene la propiedad

$$\int d^3\mathbf{r} f(\mathbf{r}) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = f(\mathbf{r}_0). \quad (\text{A.9})$$

Coordenadas cilíndricas:

$$\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0) \quad (\text{A.10})$$

Coordenadas esféricas:

$$\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \quad (\text{A.11})$$

Un resultado del que haremos uso con frecuencia en electromagnetismo, el cuál usa la delta de Dirac es el siguiente:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) = 4\pi \delta^3(\mathbf{r}). \quad (\text{A.12})$$

A.4 Identidades vectoriales

$$\nabla \times \nabla f = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (\text{A.15})$$

$$\nabla \cdot (f \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (\text{A.16})$$

$$\nabla \times (f \mathbf{A}) = \nabla f \times \mathbf{A} + f \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{A.17})$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (\text{A.18})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (\text{A.19})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (\text{A.20})$$